

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Implementação de Esquemas de Interpolação para Minimização da Difusão
Numérica em Simulação de Reservatório de Petróleo**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

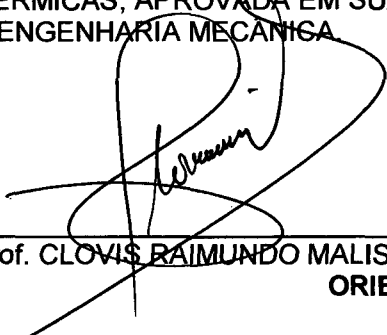
ALEXANDRE DE OLIVEIRA CZESNAT

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1999

**IMPLEMENTAÇÃO DE ESQUEMAS DE INTERPOLAÇÃO PARA MINIMIZAÇÃO DA
DIFUSÃO NUMÉRICA EM SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO**

ALEXANDRE DE OLIVEIRA CZESNAT

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE
CONCENTRAÇÃO ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, Ph.D.
ORIENTADOR



Prof. JÚLIO CÉSAR PASSOS, Dr. Eng. Mec.
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

BANCA EXAMINADORA



Prof. ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr. Eng. Mec.



Prof. ANTÔNIO AUGUSTO ULSON DE SOUZA, Dr. Eng.



Prof. MARIO CESAR ZAMBALDI, Dr.

**Dedico este trabalho a minha mãe, meu pai, a Fernanda e meu irmão,
que sempre me deram o apoio e suporte necessário.**

AGRADECIMENTOS

Aos contribuintes brasileiros que através do CNPq financiaram este trabalho.

Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska pela orientação e suporte proporcionados em todos os momentos do trabalho.

Ao Prof. Antônio Fábio C. da Silva pelas trocas de idéias a respeito de funções de interpolação.

Ao amigo Rodrigo M. Lucianetti pela sua inestimável colaboração através de inúmeras discussões e conselhos.

Ao amigo Axel Dihlmann pela presteza que sempre me atendeu e pelo estímulo que sempre me proporcionou.

Ao amigo Clovis Raimundo Maliska Jr. pela valiosa e imprescindível colaboração e suporte na programação do simulador por mim utilizado neste trabalho.

Aos colegas do SINMEC pelo excelente ambiente de trabalho.

Aos professores do curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | PRELIMINARES | 1 |
| 1.2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 2 |
| 1.3 | OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES | 7 |
| 1.4 | ESCOPO DO TRABALHO | 8 |
| 2 | LEIS DE CONSERVAÇÃO – PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS | 9 |
| 2.1 | DEFINIÇÃO DE SISTEMAS DE LEIS DE CONSERVAÇÃO HIPERBÓLICAS | 9 |
| 2.2 | DOMÍNIO DE DEPENDÊNCIA | 10 |
| 2.3 | SOLUÇÕES FRACAS | 11 |
| 2.3.1 | CONDIÇÃO DE SALTO, OU PRINCÍPIO DE RANKINE-HUGONIOT | 12 |
| 2.3.2 | CONDIÇÃO DE ENTROPIA | 12 |
| 2.4 | ESQUEMAS CONSERVATIVOS | 13 |
| 2.5 | ESQUEMAS MONÓTONOS | 14 |
| 3 | FORMULAÇÃO MATEMÁTICA | 15 |
| 3.1 | DEFINIÇÕES PRELIMINARES | 15 |
| 3.2 | MODELO <i>BLACK-OIL</i> PADRÃO | 17 |
| 3.3 | FORMULAÇÃO EM FRAÇÕES MÁSSICAS | 17 |
| 4 | FORMULAÇÃO NUMÉRICA | 20 |
| 4.1 | TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA O DOMÍNIO COMPUTACIONAL | 20 |
| 4.2 | DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES | 22 |
| 4.3 | PROCESSO DE LINEARIZAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON | 24 |
| 4.3.1 | DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES RESIDUAIS | 27 |
| 4.3.2 | SISTEMA LINEAR | 31 |
| 5 | ESQUEMAS ID PARA DISCRETIZAÇÃO DO TERMO CONVECTIVO EM LEIS DE CONSERVAÇÃO | 33 |
| 5.1 | ESQUEMA UDS (<i>UPSTREAM DIFFERENCING SCHEME</i>) | 33 |
| 5.1.1 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA UDS PARA O SISTEMA GENERALIZADO | 34 |
| 5.1.2 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA UDS NAS EQUAÇÕES DO PETRÓLEO | 34 |
| 5.2 | ESQUEMA CDS (<i>CENTRAL DIFFERENCING SCHEME</i>) | 37 |
| 5.2.1 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA CDS PARA O SISTEMA GENERALIZADO | 38 |
| 5.2.2 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA CDS NAS EQUAÇÕES DO PETRÓLEO | 39 |
| 5.3 | ESQUEMA TVD (<i>TOTAL VARIATION DIMINISHING</i>) | 41 |
| 5.3.1 | ESQUEMA TVD VIA INCLINAÇÃO LIMITADA | 42 |

| | | |
|-----------|---|-------------------|
| 5.3.2 | ESQUEMA TVD VIA FLUXO LIMITADO | 45 |
| 5.3.3 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA TVD NO SISTEMA GENERALIZADO | 51 |
| 5.3.4 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA TVD NAS EQUAÇÕES DO PETRÓLEO | 54 |
| 5.4 | ESQUEMA ENO (<i>ESSENTIALLY NON-OSCILLATORY</i>) | 55 |
| 5.4.1 | ENO DE HARTEN E OSHER | 55 |
| 5.4.2 | ENO DE SHU E OSHER | 56 |
| 5.4.3 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA ENO DE SHU E OSHER NO SISTEMA GENERALIZADO | 59 |
| 5.4.4 | APLICAÇÃO DO ESQUEMA ENO DE SHU E OSHER NAS EQUAÇÕES DO PETRÓLEO | 61 |
| 6 | <u>ESQUEMAS 2D PARA DISCRETIZAÇÃO DO TERMO CONVECTIVO EM LEIS DE CONSERVAÇÃO</u> | <u>63</u> |
| 6.1 | ESQUEMA MUDS (<i>MULTIDIMENSIONAL UPWIND</i>) | 63 |
| 6.1.1 | ESQUEMA MUDS DE 1ª ORDEM | 65 |
| 6.1.2 | ESQUEMA MUDS DE 2ª ORDEM LED (<i>LOCAL EXTREMUM DIMINISHING</i>) | 68 |
| 6.1.3 | APLICAÇÃO DOS ESQUEMAS MUDS NAS EQUAÇÕES DO PETRÓLEO | 72 |
| 7 | <u>ESQUEMA NOVE-PONTOS PARA DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES DO PETRÓLEO</u> | <u>75</u> |
| 7.1 | MOTIVAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DO ESQUEMA NOVE-PONTOS | 75 |
| 7.2 | ESQUEMA NOVE-PONTOS DE BAIXA ORDEM | 76 |
| 7.2.1 | IMPLEMENTAÇÃO NO SISTEMA CARTESIANO | 76 |
| 7.2.2 | TRANSFORMAÇÃO PARA COORDENADAS CURVILÍNEAS | 78 |
| 7.2.3 | AVALIAÇÃO DAS MOBILIDADES PARA NOVE-PONTOS DE BAIXA ORDEM | 83 |
| 7.2.4 | CUIDADOS COM A CONDIÇÃO DE NEUMAN PARA O ESQUEMA NOVE-PONTOS | 84 |
| 7.2.4.1 | Implementação da Correção de Bajor e Cormack no Sistema Generalizado | 86 |
| 7.3 | ESQUEMA NOVE-PONTOS DE ALTA RESOLUÇÃO | 87 |
| 7.3.1 | AVALIAÇÃO DAS MOBILIDADES PARA NOVE-PONTOS DE ALTA RESOLUÇÃO | 87 |
| 8 | <u>RESULTADOS E DISCUSSÕES</u> | <u>89</u> |
| 8.1 | PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS | 89 |
| 8.1.1 | BUCKLEY-LEVERETT | 89 |
| 8.1.1.1 | Permeabilidades Relativas Lineares | 91 |
| 8.1.1.2 | Permeabilidades Relativas Não-Lineares | 94 |
| 8.2 | PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS | 98 |
| 8.2.1 | COORDENADAS CARTESIANAS | 98 |
| 8.2.1.1 | Configuração <i>Five-Spot</i> | 98 |
| 8.2.1.1.1 | Permeabilidades Relativas Lineares | 98 |
| 8.2.1.1.2 | Permeabilidades Relativas Não-Lineares | 117 |
| 8.2.2 | COORDENADAS CURVILÍNEAS | 131 |
| 8.2.2.1 | Problema dos 3 Poços | 131 |
| 9 | <u>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</u> | <u>140</u> |
| 9.1 | CONCLUSÕES | 140 |
| 9.2 | RECOMENDAÇÕES | 141 |

| | |
|--|------------|
| APÊNDICE A - AVALIAÇÃO DAS DERIVADAS DOS POTENCIAIS | 142 |
| APÊNDICE B - COEFICIENTES DE FALHA | 144 |
| B.1 CONSTRUÇÃO DOS COEFICIENTES DE FALHA | 144 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 148 |

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo dos efeitos de orientação de malha nas equações de petróleo, utilizando coordenadas generalizadas, e da minimização destes erros através da aplicação de funções de interpolação adequadas.

Pode-se afirmar que a obtenção da frente de deslocamento dos fluidos é um dos maiores problemas encontrados na simulação numérica de reservatórios de petróleo e, a maior ou menor acurácia advém exatamente do método utilizado na aproximação dos termos de fluxo advectivos das equações governantes. O método tradicionalmente empregado para aproximação destes termos é o de ponderação a montante que sempre conduz a soluções fisicamente corretas, porém introduz uma excessiva difusão numérica. Consequentemente este método tende a dissipar excessivamente a frente de avanço. Esta difusão numérica causa duas importantes manifestações. Uma é que frentes são suavizadas e passam a ocupar um grande número de volumes, resultando em predições errôneas de tempo de irrupções. E a outra é a distorção da forma da frente, ocasionando o efeito de orientação de malha, e consequentemente, a recuperação de óleo calculada torna-se excessivamente dependente da malha.

Esquemas de alta resolução, esquemas multidimensionais e esquemas que homogeneizam a difusão numérica são capazes de minimizar o efeito de orientação de malha, e por isto, são utilizados na simulação de reservatórios de petróleo. Estes esquemas são apresentados, comentados, transformados para coordenadas generalizadas, aplicados nas equações governantes do petróleo e testados em uma série de problemas. Por fim, seus resultados são comparados entre si e com soluções analíticas (quando existentes) ou com soluções com malha mais refinada.

ABSTRACT

This work studies the grid orientation effects in the petroleum governing equations, using boundary-fitted coordinates, and the minimization of these errors applying adequately schemes.

The solution of the displacement front is a one of the toughest problems in reservoir simulation and its accuracy depends strongly on the approximation scheme used for the convective terms of the governing equations. The scheme normally used is the UDS, which stabilizes the numerical solution and always gives physical solutions, but introduces high levels of numerical diffusion. Hence, this method excessively smears the front. The numerical diffusion has two important consequences. One is the smearing of the front, which can cause wrong forecasts of the breakthrough. The other one is the distortion of the displacement front, causing the grid orientation effect, and therefore, the calculated oil recovery becomes excessively grid dependent.

High-resolution schemes, multidimensional schemes and schemes that homogenize the numerical diffusion are able to reduce the grid orientation effect, and so, they are used in petroleum reservoir simulation. These schemes are presented, discussed, transformed to boundary-fitted coordinates, applied in the petroleum governing equations and tested in some problems. The results are compared among each other and with analytical solutions or with grid refined solutions.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - Configuração five-spot | 3 |
| Figura 1.2 - Malhas diagonais e paralelas | 4 |
| Figura 2.1 – Domínio de dependência | 10 |
| Figura 4.1 - Domínio físico e transformado | 20 |
| Figura 4.2 - Volume de controle elementar | 23 |
| Figura 4.3 – Volumes presentes no esquema numérico | 26 |
| Figura 5.1 – Reconstrução de S_p utilizando a Eq. (5.52). Esta reconstrução dá origem ao esquema de Lax-Wendroff | 44 |
| Figura 5.2 – Reconstrução de S_p utilizando a função <i>minmod</i> , Eq.(5.55). | 44 |
| Figura 5.3 – Volumes utilizados para o cálculo de r , de acordo com a direção de fluxo | 47 |
| Figura 5.4 – Região TVD geral | 48 |
| Figura 5.5 – Região TVD de 2ª ordem | 49 |
| Figura 5.6 – Limitador de 3ª ordem | 50 |
| Figura 5.7 – Limitadores delimitadores da fronteira da região de segunda ordem | 51 |
| Figura 6.1 – Plano bidimensional utilizado para os esquemas MUDS | 65 |
| Figura 6.2 – Domínio de interpolação do esquema MUDS de 1ª ordem para face leste | 66 |
| Figura 6.3 – Domínio de interpolação do esquema MUDS de 1ª ordem para face norte | 68 |
| Figura 6.4 - Domínio de interpolação do esquema MUDS de 2ª ordem LED para face leste | 70 |
| Figura 6.5 - Domínio de interpolação do esquema MUDS de 2ª ordem LED para face norte | 71 |
| Figura 7.1 – Frentes calculadas para a malha diagonal e paralela com PVI igual a 0.3. Razão de mobilidade igual a 10 ($M = 10$) | 76 |
| Figura 7.2 – Representação dos volumes envolvidos no esquema nove-pontos | 77 |
| Figura 7.3 – Representação dos volumes envolvidos no esquema nove-pontos generalizado. Plano computacional | 78 |
| Figura 7.4 – Frente ($S^w = 0.9$) calculadas para a malha diagonal e paralela com PVI igual a 0.5. Razão de mobilidade igual a 25 ($M = 25$) | 84 |
| Figura 7.5 – ¼ da geometria proposta por Bajor e Cormack (1989a, 1989b), onde os poços produtores estão representados por círculos cheios. Neste caso o problema está discretizado numa malha 6x6. | 85 |
| Figura 7.6 – Representação esquemática do fluxo cruzado na fronteira do domínio | 85 |
| Figura 8.1 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 1$ | 92 |
| Figura 8.2 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 1$ | 92 |
| Figura 8.3 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 2$ | 93 |

| | |
|--|-----|
| Figura 8.4 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 2$ | 94 |
| Figura 8.5 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 1$ | 95 |
| Figura 8.6 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 1$ | 96 |
| Figura 8.7 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 2$ | 97 |
| Figura 8.8 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 2$ | 97 |
| Figura 8.9 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 100 |
| Figura 8.10 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 100 |
| Figura 8.11 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 101 |
| Figura 8.12 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 101 |
| Figura 8.13 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 102 |
| Figura 8.14 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 102 |
| Figura 8.15 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS LED para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 103 |
| Figura 8.16 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS LED para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 103 |
| Figura 8.17 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 104 |
| Figura 8.18 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 104 |
| Figura 8.19 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 105 |
| Figura 8.20 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 105 |
| Figura 8.21 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 107 |
| Figura 8.22 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 108 |

| | |
|---|-----|
| Figura 8.23 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 109 |
| Figura 8.24 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 109 |
| Figura 8.25 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 110 |
| Figura 8.26 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 110 |
| Figura 8.27 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 111 |
| Figura 8.28 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 111 |
| Figura 8.29 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS LED para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 112 |
| Figura 8.30 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS LED para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 112 |
| Figura 8.31 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 113 |
| Figura 8.32 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 113 |
| Figura 8.33 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 114 |
| Figura 8.34 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 114 |
| Figura 8.35 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 116 |
| Figura 8.36 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 117 |
| Figura 8.37 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 118 |
| Figura 8.38 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 119 |
| Figura 8.39 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 119 |
| Figura 8.40 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 120 |
| Figura 8.41 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 120 |

| | |
|---|-----|
| Figura 8.42 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 121 |
| Figura 8.43 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 121 |
| Figura 8.44 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 122 |
| Figura 8.45 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 123 |
| Figura 8.46 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 124 |
| Figura 8.47 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 125 |
| Figura 8.48 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 125 |
| Figura 8.49 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 126 |
| Figura 8.50 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 126 |
| Figura 8.51 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 127 |
| Figura 8.52 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 127 |
| Figura 8.53 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 128 |
| Figura 8.54 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 128 |
| Figura 8.55 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 130 |
| Figura 8.56 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração <i>five-spot</i> e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 130 |
| Figura 8.57 – Distribuição e configuração dos poços | 131 |
| Figura 8.58 – Malha utilizada para o caso dos 3 poços (24x10) | 131 |
| Figura 8.59 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para o problema dos 3 poços | 133 |
| Figura 8.60 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para o problema dos 3 poços | 134 |
| Figura 8.61 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para o problema dos 3 poços | 134 |
| Figura 8.62 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para o problema dos 3 poços | 135 |
| Figura 8.63 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para o problema dos 3 poços | 135 |

Figura 8.64 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para o problema dos 3 poços _____ 136

Figura 8.65 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para o problema dos 3 poços _____ 136

Figura 8.66 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para o problema dos 3 poços _____ 137

Figura 8.67 – Mapa de saturação do problema dos 3 poços para 1000 dias _____ 138

Figura 8.68 – Mapa de saturação do problema dos 3 poços para 1000 dias _____ 138

Figura B.1 - Plano computacional $\xi \times \eta$ _____ 145

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 5.1 – Casos particulares do esquema TVD | 49 |
| Tabela 8.1 – Viscosidade e fator volume de formação utilizados | 90 |
| Tabela 8.2 – Constantes das curvas de permeabilidades relativas para o caso linear, Eqs.(8.6) e (8.7) | 91 |
| Tabela 8.3 – Constantes das curvas de permeabilidade relativas não-lineares, Eqs.(8.6) e (8.7) | 95 |
| Tabela 8.4 – Dados do problema de configuração <i>Five-Spot</i> com permeabilidades relativas lineares | 99 |
| Tabela 8.5 – Tempo de irrupção (<i>breakthrough</i>) em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração <i>five-spot</i> com permeabilidade relativa linear ($M = 1$) | 106 |
| Tabela 8.6 – Tempo de irrupção (<i>breakthrough</i>) em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração <i>five-spot</i> com permeabilidade relativa linear ($M = 10$) | 115 |
| Tabela 8.7 – Tempo de irrupção em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração <i>five-spot</i> com permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$) | 123 |
| Tabela 8.8 – Tempo de irrupção em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração <i>five-spot</i> com permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$) | 129 |
| Tabela 8.9 – Dados do problema dos 3 poços | 132 |
| Tabela 8.10 – Permeabilidade relativa do problema dos 3 poços | 132 |
| Tabela 8.11 – Tempo de irrupção em dias obtidos pelos esquemas numéricos para o caso dos 3 poços | 138 |

SIMBOLOGIA

| | | |
|------------|---|----------------|
| B^p | Fator volume de formação da fase p | $[m^3/m^3]$ |
| F | Função Resíduo | $[kg]$ |
| g | Aceleração da gravidade | $[m/s^2]$ |
| J | Jacobiano da transformação de coordenadas | [adimensional] |
| k | permeabilidade absoluta | $[m^2]$ |
| k^{rp} | permeabilidade relativa da fase p | [adimensional] |
| M | Massa da mistura | $[kg]$ |
| M^c | Massa do componente c | $[kg]$ |
| M^p | Massa da fase p | $[kg]$ |
| M^{cp} | Massa do componente c presente na fase p | $[kg]$ |
| m^p | Vazão mássica da fase p por unidade de volume do reservatório | $[kg/m^3s]$ |
| nc | Número total de componentes | [adimensional] |
| np | Número total de fases | [adimensional] |
| P^p | Pressão da fase p | $[Pa]$ |
| P^{cow} | Pressão capilar entre as fases água e óleo | $[Pa]$ |
| P^{cog} | Pressão capilar entre as fases gás e óleo | $[Pa]$ |
| q^p | Vazão volumétrica da fase p nas condições de reservatório por unidade de volume de reservatório | $[m^3/m^3]$ |
| S^p | Saturação da fase p | $[m^3/m^3]$ |
| V | Volume | $[m^3]$ |
| V^p | Volume da fase p | $[m^3]$ |
| V^{cp} | Volume do componente c que é liberado da fase p nas condições padrões | $[m^3]$ |
| V^{pp} | Volume do componente p associado fase p nas condições padrões | $[m^3]$ |
| X^{cp} | Fração mássica do componente c na fase p | $[kg/kg]$ |
| Z^c | Fração mássica global do componente c | $[kg/kg]$ |
| t | Tempo | $[s]$ |
| Δt | Passo de tempo | $[s]$ |

| | | |
|-----|-----------------------|-----|
| x | Coordenada cartesiana | [m] |
| y | Coordenada cartesiana | [m] |
| z | Coordenada cartesiana | [m] |

Gregos

| | | |
|-------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| α^p | Fração mássica da fase p | [kg/kg] |
| λ^p | Mobilidade da fase p | [s] |
| ϕ | Porosidade | [m ³ /m ³] |
| Φ^p | Potencial da fase p | [Pa] |
| μ^p | Viscosidade da fase p | [Ns/m ²] |
| γ^p | Peso específico da fase p | [Pa/m ³] |
| ρ^p | Massa específica da fase p | [kg/m ³] |
| ρ^m | Massa específica da mistura | [kg/m ³] |
| ξ | Coordenada no plano transformado | |
| η | Coordenada no plano transformado | |
| γ | Coordenada no plano transformado | |

Subíndices

| | |
|--------------------------------|---|
| e, w, n, s, t, b | Interfaces do volume de controle P |
| $E, W, N, S, T, B, \text{etc}$ | Pontos centrais dos volumes de controlos vizinhos ao volume P |
| NB | Vizinhança do volume P |

Superíndices

| | |
|-----|------------|
| w | Água |
| o | Óleo |
| g | Gás |
| c | Componente |
| p | Fase |

1 Introdução

1.1 Preliminares

Cabe aos engenheiros de petróleo a decisão sobre a viabilidade de exploração de uma bacia petrolífera, levando em conta parâmetros como: capacidade de produção, tipo de fluidos presentes no reservatório, estrutura geológica da bacia e técnicas operacionais necessárias para realizar a recuperação. Esta decisão envolve custos elevadíssimos e, portanto, deve ser tomada com base num estudo da bacia petrolífera. É exatamente neste estudo que a simulação numérica de reservatórios de petróleo mostra sua fundamental importância, já que uma análise experimental completa é muito complexa, senão impossível, de ser realizada. A simulação numérica além de oferecer condições para um estudo de viabilização da bacia petrolífera, também propicia o estudo de otimização da recuperação de óleo, sendo este um dos principais objetivos da engenharia do petróleo.

No reservatório de petróleo, ou melhor no meio poroso, o transporte de um fluido geralmente compreende duas parcelas: transporte convectivo e transporte difusivo. O transporte convectivo ocorre devido aos gradientes de pressão, enquanto a difusão está associada à mistura provocada pelos gradientes de concentração, chamada difusão molecular, e pela agitação do fluido no meio poroso, conhecida por dispersão hidrodinâmica.

A modelagem matemática do escoamento dos fluidos em meios porosos é feita através de equações diferenciais parciais obtidas de um balanço de massa para cada componente. Estas equações são não lineares e tem como incógnitas a pressão de um dos componentes, e as saturações de cada fase ou a fração mássica de cada componente. “É conhecido na literatura especializada que as mesmas apresentam um caráter predominantemente hiperbólico para saturações e um comportamento predominantemente parabólico para pressão. Deste fato espera-se, de uma forma geral, que a pressão seja contínua ao longo do reservatório e a saturação possa apresentar descontinuidades sob determinadas condições, já que se injeta no reservatório de petróleo um fluido com saturação diferente da existente nas proximidades do poço de injeção.” (Lopez, I. F., 1994, p. 3). Este comportamento apresentado pela saturação é determinante na concepção dos esquemas utilizados para resolver numericamente as equações governantes, pois métodos que funcionam consideravelmente bem para soluções suaves podem obter resultados desastrosos para soluções que apresentam descontinuidades.

Pode-se afirmar que a obtenção da frente de deslocamento dos fluidos, que correspondem a uma rápida variação espacial na composição do fluido advectado, é um dos maiores problemas encontrados na simulação numérica de reservatórios de petróleo e, a maior ou menor acurácia, advém exatamente do método utilizado na aproximação dos termos de fluxo advectivos das equações governantes. O método tradicionalmente empregado, na engenharia de reservatório, para aproximação destes termos, é o de ponderação a montante (UDS - *Upstream Differencing Scheme*) que sempre conduz a soluções fisicamente coerentes,

porém introduz uma excessiva difusão numérica. Conseqüentemente este método tende a dissipar excessivamente a frente de avanço. Diferentemente do que poder-se-ia imaginar, a solução deste problema não está na utilização de esquemas de ponderação de segunda ordem simples, como por exemplo diferenças centrais (CDS - *Central Differencing Scheme*), pois o uso dos mesmos acarreta na obtenção de soluções não físicas e logo, não são uma alternativa viável na área de petróleo. É importante destacar que este problema, ou seja, a discretização do termo de fluxo convectivo, não é específico da área de simulação numérica de petróleo, pois concerne também a todos os sistemas de leis de conservação que apresentem convecção dominante.

A difusão numérica causa duas importantes manifestações. Primeiramente frentes são suavizadas e passam a ocupar um grande número de volumes. Isto resulta em predições errôneas de tempo de irrupções, conhecida na área de petróleo por *breakthrough*. Além da suavização também ocorre a distorção da forma da frente, ocasionando o efeito conhecido por orientação de malha, e conseqüentemente, a recuperação de óleo calculada torna-se excessivamente dependente da malha. Pode-se dizer que, a suavização da frente está intimamente relacionada com a magnitude da difusão numérica e o efeito de orientação de malha está relacionado, aproximadamente, com a magnitude da difusão numérica em cada direção da malha, ou seja, uma manifestação multidimensional da difusão numérica. Observa-se então que, ambos os fenômenos estão relacionados de uma forma ou de outra com a magnitude da difusão numérica, e logo, a minimização desta resulta na redução destes efeitos indesejados. É importante ressaltar que estes dois efeitos podem inviabilizar estudos de otimização dos processos de recuperação de óleo via simulação de reservatórios de petróleo.

A seguir é apresentada a evolução dos diversos esquemas propostos para a discretização dos termos advectivos com o intuito de controlar e minimizar a difusão numérica.

1.2 Revisão Bibliográfica

Como dito na seção anterior, o problema da difusão numérica não é exclusivo da área de engenharia do petróleo e portanto o desenvolvimento de esquemas que lidam com esta dificuldade foi dado em várias áreas. A aerodinâmica, por exemplo, é uma das principais áreas de desenvolvimento pois lidam freqüentemente com as equações de Euler, que são puramente advectivas. Nesta seção mostra-se a evolução dos métodos que visam a minimização da difusão numérica nos problemas de simulação numérica de reservatórios de petróleo, mostrando também os trabalhos, que de uma maneira ou de outra, influenciaram o caminho traçado pelos pesquisadores da engenharia do petróleo.

Pode-se considerar o trabalho de Courant *et al.* (1952) como o pioneiro da família de esquemas UDS, ou seja, esquemas que consideram o sentido do escoamento. Entretanto, foi no trabalho de Godunov (1959) que se introduziu as idéias fundamentais nas quais hoje se baseiam muitos esquemas de alta resolução. No método de Godunov a solução numérica em cada passo de tempo é considerada constante dentro de cada volume computacional. Depois computa-se a sua evolução exata, resolvendo um problema de Riemann em cada interface e calcula-se através de médias em cada volume uma nova distribuição uniforme por partes. Uma importante contribuição do trabalho de Godunov foi o seu famoso teorema em que ele prova que: esquemas advectivos que preservam a monotonicidade da solução são, no máximo, de primeira ordem de acurácia. Este resultado poderia ter desencorajado a procura de métodos

de alta ordem que não produzam oscilações mas, na prova do teorema foi assumido que a discretização é linear e, conseqüentemente, quando se admite discretizações não lineares o teorema deixa de ser válido e esquemas de alta resolução tornam-se possíveis.

Lax e Wendroff (1960) desenvolveram um dos primeiros esquemas de segunda ordem. Este é de segunda ordem no tempo e no espaço, captando choques com maior precisão, por outro lado, pode apresentar oscilações. O método de Lax-Wendroff, suas variações *predictor-corrector* [Richtmyer e Morton (1967), MacCormack (1969), Rubin e Burstein (1976)] e esquemas similares de terceira ordem [Rusanov (1970), Burstein e Mirin (1970)] dominaram a pesquisa em métodos para equações hiperbólicas por mais de uma década. O mais popular destes esquemas foi o de MacCormack com um grande uso em aplicações industriais.

A percepção de que o teorema de Godunov poderia ser contornado veio no começo da década de 70, quando dois métodos apareceram, com menos de um ano de intervalo, objetivando a construção de esquemas advectivos de alta ordem livres de oscilações. Boris apresentou o primeiro esquema de segunda ordem não-oscilatório, SHASTA (*Sharp and Smooth Transport Algorithm*), num seminário em Trieste em agosto de 1971, seguido por Van Leer, que apresentou uma modificação não-oscilatória do esquema de Lax e Wendroff na Terceira Conferência Internacional de Métodos Numéricos em Mecânica dos Fluidos em Paris, ocorrida em julho de 1972. Estes esquemas, embora bastante diferentes, são similares no uso da não linearidade para prevenir as oscilações em regiões com gradientes fortes, uma dificuldade que vinha persistindo nos métodos para solução de equações hiperbólicas até então.

A orientação de malha, como já dito, um efeito multidimensional da difusão numérica foi primeiramente apontado por Todd *et al.* (1972). Eles utilizaram uma configuração de poços chamada *five-spot*, ou seja, configuração formada por quatro poços injetores em cada face de um quadrado e um poço produtor no centro, como pode ser visto na Fig. 1.1. Esta configuração foi resolvida fazendo uso de duas malhas cartesianas ilustradas na Fig. 1.2.

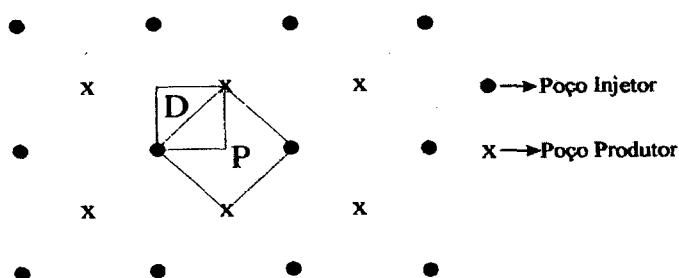


Figura 1.1 - Configuração five-spot

A malha diagonal representa um quarto de *five-spot*, com linhas a 45° da direção que conecta o poço injetor ao poço produtor. A malha paralela representa metade de *five-spot*, com linhas paralelas ou perpendiculares à linha que conecta o par de poços produtor-injetor. Todd *et al.* demonstraram que os resultados dependem da malha utilizada e que a diferença entre os resultados decresce com o aumento do número de pontos da mesma. Eles propuseram um esquema de dois pontos a montante para reduzir os efeitos de orientação. O método é de

segunda ordem no espaço e reduz os efeitos da difusão numérica. No entanto, em alguns casos havia o aparecimento de oscilações numéricas. Além de Todd *et al.*, Ito (1982) também demonstrou que o uso de esquemas de um ponto a montante, ou seja, esquemas de primeira ordem, causam níveis inaceitáveis de difusão numérica. Neste ponto é importante ressaltar que, entende-se por difusão numérica o emprego de funções de interpolação de natureza dissipativa para aproximação dos termos convectivos, causada pelo fato de a função de interpolação não ser exata (Maliska, 1995, p. 92).

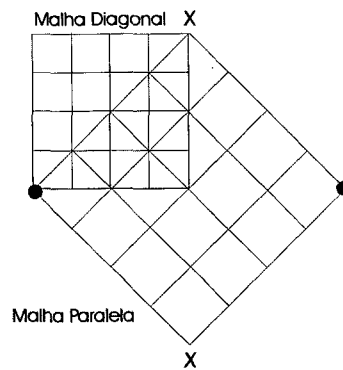


Figura 1.2 - Malhas diagonais e paralelas

Os algoritmos desenvolvidos por Boris, numa série de artigos [Boris (1973), Boris e Book (1973, 1976), Boris *et al.* (1975)], são conhecidos por métodos FCT (*Flux Corrected Transport*) e têm uma estrutura *predictor-corrector*. Basicamente consiste no uso de um esquema de primeira ordem, não oscilatório, para estimar a solução do próximo tempo, então, realiza-se uma correção para remover a difusão numérica introduzida, obtendo-se uma solução de segunda ou terceira ordem. Durante o passo corretivo, fluxos são limitados onde se faz necessário, com o intuito de garantir que nenhum extremo seja criado ou que um extremo existente cresça. O passo de comparação torna o método não linear, pois os coeficientes do esquema dependem diretamente da própria solução, mesmo quando aplicado a uma equação linear.

Por sua vez, a metodologia desenvolvida por Van Leer foi publicada numa série de cinco artigos (1973-79). Neste trabalho, oscilações foram consideradas como resultado de interpolação oscilatória dos valores iniciais discretos, e portanto, a correção do problema consistia na introdução de interpolações não-oscilatórias ou preservadoras da monotonicidade. Se por um lado o método de Godunov é baseado num valor uniforme em cada volume, estes métodos de alta ordem baseiam-se na reconstrução linear ou quadrática a partir dos valores de cada volume. A monotonicidade foi preservada limitando os valores das derivadas primeiras e segundas da distribuição, ou seja, limita-se a inclinação da distribuição para que não surja oscilações. Seguindo Godunov, os esquemas de Van Leer também incluem fluxos derivados da solução de problemas de Riemann e que quando combinados com reconstrução de alta ordem resultam em esquemas que levam em consideração a direção do fluxo, daí o nome MUSCL (*Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws*) dado ao primeiro código. Os métodos MUSCL utilizam reconstrução linear por partes e conseguem segunda ordem de acurácia em escoamentos suaves. Estes métodos foram mais tarde aprimorados por Colella e

Woodward (1984) e Woodward e Colella (1984) e ficaram conhecidos por PPM (*Piecewise Parabolic Method*). São baseados na reconstrução parabólica e, embora sejam formalmente de segunda ordem, apresentam erros de truncamento consideravelmente menores do que o MUSCL. Até hoje em dia os métodos PPM são os mais adequados para simular escoamentos que dependem violentamente do tempo.

Na simulação numérica de reservatórios de petróleo, pode-se considerar Chaudhari (1971) como o primeiro a tentar controlar a difusão numérica introduzida pelo esquema UDS. “Chaudhari propôs um método que consistia em adicionar, na equação diferencial, termos com sinais contrários àqueles introduzidos artificialmente pelo método de um ponto a montante. Embora tenha sido bastante utilizado em simuladores de métodos miscíveis de recuperação de petróleo [Gupta *et al.* (1986), Pope *et al.* (1981)], hoje em dia é pouco utilizado por estar limitado a malhas uniformes e por apresentar, em alguns casos, soluções oscilatórias [Saad *et al.* (1990)].” (Pinto, 1991, p. 3)

Yanosik e McCracken (1976), observaram que o efeito de orientação de malha provavelmente era causado pela não contabilização do fluxo entre o volume onde se está calculando e seu vizinho na diagonal. Eles então introduziram um esquema de nove-pontos que contabilizava este fluxo. Foram mostrados resultados para várias razões de viscosidades, com valor máximo de 50, obtendo soluções praticamente idênticas para malhas diagonais e paralelas. Estes resultados podem levar a crer que a difusão numérica foi anulada nestas simulações, o que não é verdade. A contabilização dos fluxos considerando-se mais pontos tem como consequência uma homogeneização dos erros de truncamento e portanto geram soluções com semelhantes quantidades de difusão numérica em cada direção. No final da década de setenta e começo da década de oitenta, vários autores, como por exemplo, Ko e Au (1979), Coats e Modine (1983) e Shah (1983), propuseram metodologias complexas para tentar corrigir resultados não físicos obtidos pela metodologia de Yanosik e McCracken para problema com razão de mobilidade bastante desfavorável com deslocamento de frente do tipo pistão.

Harten (1983-84), inspirado por Glimm e Lax (1970), que mostraram que a variação total da solução de uma lei de conservação escalar unidimensional não pode crescer e, na verdade, decresce em um choque, introduziu a variação total de uma função discreta como medida de sua natureza oscilatória, com a promessa de uma aplicabilidade multidimensional. Isto levou a formulação dos esquemas TVD (*Total Variation Diminishing*) que rapidamente tornaram-se sinônimos de esquemas de alta resolução. Mais tarde foi mostrado por Goodman e LeVeque (1985) que um esquema TVD multidimensional é no máximo de primeira ordem de acurácia. Harten e Osher (1987) e Harten *et al.* (1987), então reexaminaram a teoria de interpolação não-oscilatória e desenvolveram os esquemas ENO. Mais tarde Shu e Osher (1988a, 1988b) desenvolveram uma maneira eficiente e mais simples de implementar os esquemas ENO.

Segundo LeVeque (1992) esquemas de alta resolução, como os acima mencionados, devem apresentar as seguintes características:

- No mínimo segunda ordem de acurácia para soluções suaves, e também, em regiões suaves de uma solução que apresenta descontinuidades.
- Boa captura da descontinuidade sem excessiva difusão.
- Não produzam oscilações espúrias nas regiões de fortes gradientes.
- Uma forma apropriada de consistência com a forma fraca da lei de conservação.
- Limites de estabilidade não lineares, juntamente com consistência, permite provar

convergência a medida que a malha é refinada.

- Uma forma discreta da condição de entropia, permitindo concluir que as aproximações estão de fato convergindo para a solução fisicamente coerente.

Na década de 80 alguns métodos de alta resolução começaram a ser utilizados na simulação numérica de petróleo. Colella *et al.* (1983) utilizaram métodos Godunov de alta ordem para controlar a difusão numérica na simulação de reservatórios de petróleo unidimensionais. Bell e Shubin (1985) realizaram a extensão multidimensional da aproximação de Godunov de alta ordem. O esquema utiliza o método das características para solução das equações governantes do petróleo, e portanto, não é de simples implementação nos códigos existentes.

Hegre *et al.* (1986), estenderam o esquema de nove pontos desenvolvido por Yanosik e McCracken para malhas distorcidas, também conhecidas na área do petróleo por *corner point geometry*, utilizando o método dos elementos finitos. Aplicaram a técnica desenvolvida para um problema constituídos por dois poços produtores dispostos simetricamente em relação a um poço injetor. As malhas, para este caso, são construídas de modo a alinhar a direção da malha com a direção do poço injetor e com um dos poços produtores. Resultados com pouco efeito de orientação de malha são apresentados, no entanto, semelhante ao esquema de Yanosik e McCracken, apresentam difusão numérica.

Taggart e Pinczewski (1987), utilizando diferenças finitas, desenvolveram esquemas de segunda e de terceira ordem uniformes, ou seja, esquemas que possuem a mesma ordem espacial e temporal, para solução de escoamentos em meios porosos. Mostraram que a utilização de esquemas de alta ordem resulta em melhores previsões de frentes de deslocamentos e, em alguns casos, melhora o efeito de orientação de malha, porém, fazia-se necessário a adição de dispersão física no modelo.

Bajor e Cormack (1989a, 1989b) demonstraram através de testes que a deficiência da metodologia de Yanosik e McCracken decorria da incorreta implementação da condição de contorno de Neuman, fluxo prescrito nulo, e propuseram uma modificação na metodologia original. Artavés e um problema com solução analítica comprovaram que sua metodologia corrigia o problema do esquema de Yanosik e McCracken.

Rubin e Blunt (1991) abrindo mão da segunda ordem de precisão no tempo, introduziram um esquema TVD aplicado nos fluxos para modelos *Black-Oil* em coordenadas cartesianas com formulação totalmente implícita ou IMPES, baseados nos artigos de Sweby (1984-85). A redução de acurácia temporal foi necessária para possibilitar a fácil implementação nas equações parabólicas-hiperbólicas da simulação numérica de petróleo.

Pinto *et al.* (1991) e Pinto (1992) utilizaram TVD para malhas cartesianas não-uniformes e aplicaram o esquema diretamente nas permeabilidades relativas e não no fluxo, como comumente era feito. Ficou mostrado, para os casos estudados, que esta forma produz melhores resultados que a aplicação nos termos de fluxo, como proposto por Rubin e Blunt (1991).

Chen *et al.* (1991), mostraram a minimização do efeito de orientação de malha, em problemas com geometria *five-spot*, através da aplicação dos esquemas TVD de 2ª ordem e ENO de 3ª ordem. Os autores concluem que o uso do esquema ENO traz uma substancial redução do efeito de orientação de malha relativo ao método UDS. Os mesmos ainda enfatizam que, os métodos de alta resolução são úteis não apenas quando o problema de orientação de malha se faz presente, mas também, por resolverem a frente de deslocamento com maior acurácia, e portanto, obtendo soluções mais fidedignas que o esquema UDS.

Concluem ainda que, utilizando-se um método de alta ordem, pode-se utilizar um menor número de volumes para alcançar a mesma acurácia obtida com o UDS.

Shin e Merchant (1993) utilizaram uma idéia similar ao esquemas FCT de Boris para criar o método intitulado *Higher-Order Flux Update Function Method* para simulação de reservatórios de petróleo. O método consiste basicamente em calcular o fluxo de cada fase através de um esquema de baixa ordem e depois corrigi-los com um esquema de alta ordem calculado com os valores da iteração anterior. Com este procedimento a matriz jacobiana não é alterada, e logo, exige pouco esforço para ser implementado em códigos existentes.

Maliska *et al.* (1993), Cunha *et al.* (1994) e Cunha (1996) obtiveram resultados muito próximos ao esquema de nove pontos de Yanosik e McCracken, utilizando malhas curvilíneas generalizadas, com linhas coordenadas alinhadas ao fluxo do escoamento, e esquema de interpolação UDS. Observa-se, que são poucas as configurações onde se pode gerar malhas alinhadas ao fluxo do escoamento, e portanto, o uso de coordenadas curvilíneas generalizadas não elimina a preocupação com a difusão numérica.

Mota e Maliska (1994) e Mota (1994) fizeram a extensão do TVD de Rubin e Blunt para coordenadas generalizadas, aplicando o esquema nas permeabilidades relativas. Mota observou que a hipótese simplificativa utilizada por Pinto, aplicar o esquema TVD nas permeabilidades relativas, pode não ser válida quando tem-se $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \neq 0$ e/ou $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \neq 0$, ou seja, o

caráter convectivo do fluxo pode não ser dado apenas pela derivada da permeabilidade relativa. Nestes casos Mota recomendou o uso do TVD proposto por Rubin e Blunt.

Lopez (1994), investigou a utilização de esquemas a montante usual e de alta ordem, com termo de montante inclinado ou não, para malhas estruturadas compostas de quadriláteros. Vários casos encontrados na literatura foram testados e bons resultados foram obtidos para o esquema de alta ordem com termo de montante inclinado.

Wolcott *et al.* (1996a, 1996b), formularam, para malhas cartesianas, um esquema de nove pontos de alta resolução utilizando TVD. Comparações são realizadas entre o esquema de cinco pontos com UDS e TVD e nove pontos com UDS e TVD. Resultados obtidos mostram que o método proposto apresenta orientação de malha reduzida, com difusão numérica bastante menor que o esquema de Yanosik e McCracken.

1.3 Objetivos e Contribuições

O presente trabalho tem por objetivos o estudo dos efeitos de orientação de malha nas equações de petróleo, utilizando coordenadas generalizadas, e da minimização destes erros através da aplicação de funções de interpolação adequadas.

Além destes objetivos, este trabalho tenta mostrar que o comportamento apresentado pelos diferentes esquemas no sistema cartesiano são semelhantes no sistema generalizado, pois realiza-se apenas uma transformação de coordenadas objetivando-se ganhar flexibilidade geométrica.

O trabalho teve como fonte de motivação um projeto de cooperação firmado entre o CENPES/PETROBRÁS e o SINMEC (Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor). Deste projeto foi desenvolvido o Sirp3D, que é um simulador tridimensional trifásico de reservatório de petróleo, que emprega coordenadas

curvilíneas não-ortogonais, formulação em frações mássicas e o método totalmente implícito. A preocupação com os efeitos de orientação de malha surgiu em virtude de testes realizados na PETROBRÁS, durante o período de estágio do autor deste trabalho, que apontaram uma acentuada difusão numérica no Sirp3D, que utiliza como função de interpolação o esquema UDS, e por isto tornou-se imperativo estudar a causa destes efeitos, assim como também avaliar melhor as suas conseqüências e magnitudes.

As contribuições deste trabalho estão galgadas no estudo e implementação de funções de interpolação na simulação de reservatórios de petróleo utilizando coordenadas generalizadas onde é possível observar a existência de poucos trabalhos. É proposto no presente trabalho o esquema ENO e o esquema nove-pontos de baixa e alta-ordem.

1.4 Escopo do Trabalho

No segundo capítulo apresenta-se alguns princípios matemáticos importantes que afetam diretamente as soluções numéricas das leis de conservação hiperbólicas. Objetiva-se neste capítulo abordar alguns aspectos e definições matemáticas que podem, se adequadamente esclarecidas, facilitar o estudo de outros engenheiros que porventura necessitem trabalhar com equações hiperbólicas.

No terceiro capítulo aborda-se a formulação matemática adotada no presente trabalho, apresentando as equações que governam o escoamento de água, de óleo e do gás no meio poroso.

No quarto capítulo as equações diferenciais do modelo matemático são transformadas para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, e então, discretizadas via método dos volumes finitos. Apresenta-se também o processo de linearização das equações de conservação discretizadas.

No quinto capítulo apresenta-se esquemas unidimensionais utilizados para a aproximação dos termos convectivos em equações de conservação, onde os mesmos são dominantes. As funções UDS, CDS, TVD e ENO são abordadas primeiramente em coordenadas cartesianas e depois transformadas para coordenadas generalizadas, e então, explana-se como implementá-las nas equações do petróleo.

No sexto capítulo apresenta-se os esquemas bidimensionais MUDS e MUDS LED. Propõe-se uma adaptação destes esquemas para ser aplicado nas equações do petróleo.

No sétimo capítulo apresenta-se o esquema nove-pontos de baixa idealizado por Yanosik e McCracken e o de alta-ordem idealizado por Wolcott *et al.* Propõe-se a transformação destes para as equações de petróleo no sistema generalizado.

O oitavo capítulo é reservado para a apresentação dos resultados numéricos. Apresenta-se resultados unidimensionais (equação de Buckley-Leverett) com permeabilidades relativas lineares e não-lineares, problemas bidimensionais com configuração *five-spot* e o problema dos três poços.

Por fim, no nono capítulo são mencionadas as conclusões do presente trabalho e recomendações para futuros trabalhos.

2 Leis de Conservação – Princípios Matemáticos

Neste capítulo discute-se os fundamentos matemáticos que norteiam as leis de conservação. O enfoque principal será nos princípios e condições que afetam diretamente as soluções numéricas das leis de conservação hiperbólicas. Não objetiva-se aqui, provar estes princípios ou formulá-los com todo o formalismo matemático possível, mas sim, esclarecer os mesmos aos engenheiros que, por um motivo ou outro, necessitem trabalhar com este tipo de equação.

2.1 Definição de Sistemas de Leis de Conservação Hiperbólicas

Como este trabalho lida com esquemas numéricos que objetivam resolver equações com caráter hiperbólico, torna-se importante elucidar, o que se entende por um sistema de leis de conservação hiperbólico. Este é um conjunto de equações diferenciais parciais, usualmente não lineares, com uma estrutura bastante particular. Em duas dimensões um sistema de leis de conservação tem a forma

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\phi(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial g(\phi(x, y, t))}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

onde,

$\phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ - vetor de quantidades conservadas m-dimensional;

$f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - funções fluxo de ϕ .

Segundo LeVeque (1992), a Eq.(2.1) é um sistema hiperbólico se qualquer combinação linear, $\alpha * f'(\phi) + \beta * g'(\phi)$, das matrizes jacobianas dos fluxos possa ser diagonalizável com vetores próprios reais, ou seja, existe um conjunto completo de m vetores próprios linearmente independentes.

Uma outra maneira de enxergar esta definição é vislumbrando uma de suas consequências, que diz que, se a Eq.(2.1) pode ser transformada em um conjunto de m equações diferenciais ordinárias independentes, então, é um sistema hiperbólico. Isto pode ser melhor compreendido exemplificando na seguinte equação escalar de advecção linear:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Definindo-se,

$$x'(t) = a \quad (2.3)$$

e diferenciando-se ϕ em relação ao tempo ao longo de x , definido na Eq.(2.3), resulta em

$$\frac{d\varphi(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial \varphi(x(t),t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(x(t),t)}{\partial x} x'(t) \quad (2.4)$$

Substituindo a Eq.(2.3) em (2.4), tem-se

$$\frac{d\varphi(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

ou seja, substitui-se a equação diferencial parcial por uma equação diferencial ordinária.

Na seções e capítulos subsequentes, deve-se considerar, caso não se diga o contrário, φ sempre um escalar, ou seja, $m = 1$.

2.2 Domínio de Dependência

O domínio de dependência de um certo ponto da solução em um determinado tempo, pode ser definido como um intervalo de pontos que afetam a solução, ver Fig. 2.1.

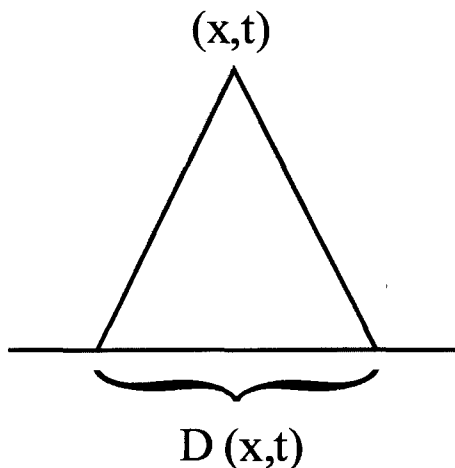


Figura 2.1 – Domínio de dependência

Para uma equação de advecção linear, Eq.(2.2), o domínio de dependência consiste de apenas um ponto, e portanto, qualquer ponto da solução em um certo tempo depende apenas de um ponto da condição inicial. Esta observação tem consequências importantes, pois se a condição inicial apresentar uma descontinuidade em apenas algum ponto x_0 , então, a solução resultante apresentará a descontinuidade apenas nos pontos que estão na região de influência de x_0 . Para um sistema de equações hiperbólicas o domínio de dependência é tipicamente um intervalo, portanto, o fato que deve ser ressaltado é que o domínio de dependência de equações hiperbólicas é sempre limitado, ou seja, a condição inicial em um dado ponto x_0 pode influenciar a solução apenas em uma região limitada. Por outro lado, as equações elípticas tem como domínio de dependência todo o domínio, e consequentemente, todos os pontos afetam-se mutuamente.

Pode-se resumir este comportamento dizendo-se que, as equações hiperbólicas têm velocidade de propagação finita, ou seja, a informação viaja com uma velocidade limitada. Esta observação tem conseqüências no desenvolvimento de métodos numéricos para leis de conservação hiperbólicas.

2.3 Soluções Fracas

Seja um problema de Cauchy, ou seja, um problema de valor inicial puro, com a seguinte lei de conservação:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

e com a condição inicial

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \rightarrow \forall -\infty < x < \infty \quad (2.7)$$

Mesmo que a função definida na Eq.(2.7) seja suave, $\varphi_0 \in C^k(-\infty, \infty)$ onde C^k é o espaço das funções diferenciáveis k vezes, a solução da Eq.(2.6) pode apresentar singularidades. Apenas no caso linear, ver Eq.(2.2), é que a solução da equação apresenta a mesma suavidade da condição inicial.

No sentido clássico da matemática, soluções que apresentam singularidades ou descontinuidades não satisfazem a equação diferencial parcial, Eq.(2.6), em todos os pontos, já que as derivadas não estão definidas em pontos de singularidade. Para permitir que soluções descontínuas sejam obtidas introduz-se o conceito de forma fraca da equação diferencial. Este conceito é apenas uma técnica matemática, que permite que se rescreva a equação diferencial em uma forma que não requeira suavidade para definir uma solução da mesma, ou melhor, que requeira um menor grau de suavidade. A idéia básica é multiplicar a equação diferencial por uma função teste suave, integrar uma ou mais vezes sobre algum domínio e usar a integração por partes para retirar as derivadas da função φ , aparecendo apenas na função teste. O resultado é uma equação que envolve derivadas de ordem menor em φ , e portanto, requerendo um menor grau de suavidade.

Multiplicando-se a Eq.(2.6) por uma função $\Theta(x, t)$ suave de suporte compacto $[a, b]$, ou seja, que tende a zero para x fora deste intervalo, e integrando-se para $-\infty < x < \infty$ e $t \geq 0$, obtém-se

$$\int_a^b \int_0^T \Theta(x, t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right] dt dx = 0 \quad (2.8)$$

Integrando-se a Eq.(2.8) por partes, tem-se

$$\int_a^b \int_0^T \left[\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial t} + f(\varphi) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right] dt dx + \int_a^b \Theta(x, 0) \varphi_0(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

Observa-se que agora φ e f não precisam ter suas derivadas definidas. A Eq.(2.9) é a forma fraca da Eq.(2.6) e uma função $\varphi(x, t)$ que satisfaz a Eq.(2.9), para qualquer $\Theta(x, t)$

suave, é intitulada a solução fraca da lei de conservação, Eq.(2.6). Ressalta-se que podem existir várias soluções fracas para um problema matematicamente bem posto com uma mesma lei de conservação e uma mesma condição inicial, mas apenas uma única solução fisicamente correta. Uma forma de ser encontrar esta é fazer com que a solução fraca obedeça certos critérios, apresentados nas seções 2.3.1 e 2.3.2.

Uma outra possibilidade seria introduzir um termo difusivo na Eq.(2.6) para obter uma equação com apenas uma solução suave, e então, deixar este termo tender a zero. Este método, conhecido por *vanishing viscosity*, tem algum uso na análise de leis de conservação, mas não é adequado, por não se saber de antemão o valor ótimo do coeficiente difusivo e exigir o tratamento numérico de mais um termo diferencial. Por esta razão é preferível impor algumas condições diretamente na solução da equação hiperbólica, e com isso, obter a solução fisicamente correta.

2.3.1 Condição de Salto, ou Princípio de Rankine-Hugoniot

Este princípio está relacionado com a velocidade de propagação das descontinuidades da solução fraca. A condição de Rankine-Hugoniot diz que

$$s = \frac{f(\varphi_l) - f(\varphi_r)}{\varphi_l - \varphi_r} \quad (2.10)$$

onde,

- s - velocidade de propagação da descontinuidade;
- φ_l - valor da quantidade conservada a esquerda da descontinuidade;
- φ_r - valor da quantidade conservada a direita da descontinuidade.

Destaca-se que este princípio é derivado da lei de conservação na sua forma integral, e conseqüentemente, soluções com velocidade de propagação diferente da Eq.(2.10) não respeitam a lei de conservação, Eq.(2.6), e logo, não são soluções fracas da mesma.

Não obstante, ainda é necessário mais uma condição para garantir unicidade.

2.3.2 Condição de Entropia

O critério conhecido como condição de entropia foi introduzido por Oleinik (1957). Existem vários enunciados para este princípio. Aqui enuncia-se dois, que são:

- Condição de entropia (versão 1)

Também conhecida por *vanishing viscosity*, diz que a solução correta da Eq.(2.6) é aquela obtida resolvendo-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

com um valor de ε suficientemente pequeno. Como já foi dito, esta maneira de se obter a solução fisicamente correta não é muito prática, pois nunca se sabe o menor valor de ε capaz de estabilizar a solução numérica.

- **Condição de entropia (versão 2)**

Uma solução $\varphi(x,t)$ respeita a condição de entropia se todas as descontinuidade tem a seguinte propriedade:

$$\frac{f(\varphi) - f(\varphi_l)}{\varphi - \varphi_l} \geq s \geq \frac{f(\varphi) - f(\varphi_r)}{\varphi - \varphi_r} \quad (2.12)$$

para todo φ entre φ_l e φ_r .

Para f convexa, ou seja, $f'(\varphi) \geq 0$, a condição (2.12) reduz-se a

$$f'(\varphi_l) > s > f'(\varphi_r) \quad (2.13)$$

Este é o enunciado mais prático de ser aplicado e pode ser visto também da seguinte maneira:

$$a(\varphi_l) > s > a(\varphi_r) \quad (2.14)$$

onde,

$$a(\varphi_l) = \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_l} \quad - \quad \text{velocidade de propagação a esquerda da descontinuidade;}$$

$$a(\varphi_r) = \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_r} \quad - \quad \text{velocidade de propagação a direita da descontinuidade.}$$

Le Roux (1977) introduziu o seguinte teorema: “se um esquema numérico é convergente e satisfaz ao princípio da entropia, então converge para a solução fisicamente correta.” (Pinto, 1991, p. 36)

2.4 Esquemas Conservativos

Ao se resolver numericamente a Eq.(2.6) é necessário saber se a solução obtida é ou não a solução fraca da equação diferencial, ou seja, se a solução respeita a equação diferencial em quase todos os pontos.

Um método numérico, para a solução da Eq.(2.6), é chamado de conservativo quando pode ser escrito na seguinte forma:

$$\varphi_p^{n+1} = \varphi_p^n - \lambda(F_e - F_w) \quad (2.15)$$

onde,

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x};$$

$$F_e = F(\varphi_{p-k+1}, \dots, \varphi_{p+k}) \quad - \quad \text{função fluxo numérico avaliada na interface leste (east).}$$

A função fluxo numérico deve ser consistente, isto é, deve-se recuperar a função fluxo original no caso de escoamento constante, ou seja

$$F(\varphi, \dots, \varphi) = f(\varphi) \quad (2.16)$$

Lax e Wendroff (1960) demonstraram que, se um esquema escrito na forma conservativa converge para uma função $\varphi(x, t)$ a medida que a malha é refinada, então converge para uma solução fraca da Eq.(2.6).

2.5 Esquemas Monótonos

Mesmo que a solução numérica da Eq.(2.6) seja obtida de um método numérico conservativo, ainda não há garantias que a mesma satisfaça a condição de entropia. Para tanto, mais uma condição deve ser imposta ao esquema numérico.

Um esquema numérico na forma

$$\varphi_p^{n+1} = H(\varphi_{p-k}, \dots, \varphi_{p+k}) \quad (2.17)$$

é monótono se H for uma função crescente monótona de cada um dos argumentos, ou seja,

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_{p-q}^n} \geq 0, \text{ para } -k \leq q \leq k \quad (2.18)$$

Se H é consistente e pode ser escrito na forma conservativa, então o esquema numérico está na forma conservativa.

Harten *et al.* (1976) provaram que se a solução numérica, de um esquema numérico monótono escrito na forma conservativa, é convergente com Δt e Δx tendendo a zero com λ fixo, então a mesma é uma solução fraca e a condição de entropia, Eq.(2.12) é obedecida em todas as descontinuidades.

Impor que o esquema numérico seja monótono é bastante restritivo, pois limita que o esquema seja no máximo de primeira ordem de acurácia (Godunov, 1959), e portanto, resulta em um esquema que suaviza gradientes fortes. Harten (1978) introduziu o conceito mais geral de esquemas que preservam a monotonicidade. Um esquema numérico é dito preservador da monotonicidade, se para qualquer condição inicial monótona a solução numérica, para qualquer tempo, também é monótona. É importante salientar que o conceito de esquemas preservadores da monotonicidade não está de nenhuma maneira restrito a esquemas de primeira ordem de precisão, e portanto, pode ser utilizado para a construção dos esquemas numéricos de alta resolução.

3 Formulação Matemática

Neste capítulo apresenta-se os modelos matemáticos adotados no presente trabalho. As equações apresentadas representam o modelo *Black-Oil* padrão e governam o escoamento da água, do óleo e do gás no meio poroso.

3.1 Definições Preliminares

Com o intuito de facilitar o entendimento das equações apresentadas nas próximas seções, descreve-se a seguir definições de algumas grandezas importantes. Para uma explicação mais detalha sobre as grandezas pertinentes à simulação numérica de reservatórios de petróleo, ver Dake (1978).

- Saturação da fase p

Razão do volume da fase p pelo volume total da mistura.

$$S^p = \frac{V^p}{V} \quad (3.1)$$

- Fração mássica global do componente c

Razão da massa do componente c pela massa total da mistura.

$$Z^c = \frac{M^c}{M} \quad (3.2)$$

onde,

$$M = \sum_{nc} M^c = \sum_{np} M^p \quad (3.3)$$

- Massa específica da fase p

Razão da massa da fase p pelo volume total da mistura.

$$\rho^p = \frac{M^p}{V} \quad (3.4)$$

- Massa específica da mistura

Razão da massa total da mistura pelo volume total da mistura.

$$\rho^m = \sum_{np} \rho^p S^p \quad (3.5)$$

- Fração mássica do componente c na fase p

Razão da massa do componente c presente na fase p pela massa total da fase p.

$$X^{cp} = \frac{M^{cp}}{M^p} \quad (3.6)$$

- Fração mássica da fase p

Razão da massa da fase p pela massa total da mistura.

$$\alpha^p = \frac{M^p}{M} \quad (3.7)$$

- Mobilidade da fase p

$$\lambda^p = \frac{Kk^p \rho^p}{\mu^p} \quad (3.8)$$

- Potencial da fase p

$$\Phi^p = P^p + \rho^p g z \quad (3.9)$$

- Fator volume de formação da fase p

Razão do volume da fase p na condição de reservatório pelo volume do componente associado a esta fase na condição padrão, ou seja, condição de superfície.

$$B^p = \frac{V^p}{V^{pp}} \quad (3.10)$$

- Solubilidade do componente c na fase p

Razão do volume do componente c na fase p na condição padrão e o volume do componente associado com a fase p também na condição padrão.

$$R^{cp} = \frac{V^{cp}}{V^{pp}} \quad (3.11)$$

3.2 Modelo *Black-Oil* Padrão

É um modelo simplificado, bastante utilizado, que apresenta bons resultados para reservatórios com óleos pesados ou de baixa volatilidade. Este modelo físico tem as seguintes características:

- Isotérmico.
- Sistema de três componentes (w - água, o - óleo e g - gás) e de três fases (w - água, o - óleo e g - gás).
- As fases água e óleo são imiscíveis e não trocam massa.
- Os componentes água e óleo não vaporizam na fase gás, porém o componente gás pode dissolver-se na fase óleo.

3.3 Formulação em Frações Mássicas

A utilização das frações mássicas ao invés das saturações como variável dependente, justifica-se pelo tratamento mais simples do aparecimento e desaparecimento da fase gás, sem o emprego de qualquer método especial. Utilizando-se a formulação em saturação é necessário uma troca de variáveis, como pode ser visto em Forsyth (1984). Aplicando-se os balanços de massa para um componente geral obtém-se a seguinte equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^c] = -\nabla \cdot \left[\sum_{np} X^{cp} \rho^p \vec{u}^p \right] - \sum_{np} X^{cp} m^p \quad (3.12)$$

onde,

- ϕ - é a porosidade do meio poroso;
- $m^p = \rho^p q^p$ - é a vazão mássica de produção/injeção da fase p por unidade de volume, sendo positivo para produção e negativo para injeção;
- \vec{u}^p - é o vetor velocidade da fase p;
- q^p - é a vazão volumétrica de produção/injeção da fase p por unidade de volume, sendo positiva para produção e negativa para injeção.

A Eq.(3.12) não apresenta termos envolvendo o transporte difusivo, uma vez que os efeitos convectivos são considerados dominantes. Em um escoamento em meio poroso, a velocidade \vec{u}^p é obtida da Lei de Darcy

$$\vec{u}^p = \frac{-\lambda^p}{\rho} [\nabla \Phi^p] \quad (3.13)$$

Especificando-se a Eq.(3.12) para cada componente, ou seja, água, óleo e gás, e utilizando-se a Eq.(3.13) obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w] - m^w \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^o] = \nabla \cdot [X^{oo} \lambda^o \nabla \Phi^o] - X^{oo} m^o \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^g] = \nabla \cdot [(1 - X^{oo}) \lambda^g \nabla \Phi^g + \lambda^g \nabla \Phi^o] - (1 - X^{oo}) m^o - m^g \quad (3.16)$$

Somando as três equações anteriores obtém-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m] = \nabla \cdot [\lambda^w \nabla \Phi^w + \lambda^o \nabla \Phi^o + \lambda^g \nabla \Phi^g] - m^w - m^o - m^g \quad (3.17)$$

A Eq.(3.14) expressa a conservação de massa do componente água, a Eq.(3.15) expressa a conservação de massa do componente óleo e a Eq.(3.17), a conservação da massa total. Diz-se que a Eq.(3.17) é a equação da pressão, pois é usada no processo iterativo para o avanço desta variável.

As incógnitas do problema são P^w , P^o , P^g , Z^w , Z^o e Z^g , mas as equações disponíveis são apenas três (3.14), (3.15) e (3.17). Portanto, necessita-se de mais três equações que são as seguintes:

$$Z^g = 1 - Z^w - Z^o \quad (3.18)$$

$$P^w = P^o - P^{cow} \quad (3.19)$$

$$P^g = P^o + P^{cog} \quad (3.20)$$

onde, a Eq.(3.18) é a equação de restrição e as Eqs.(3.19) e (3.20) são equações constitutivas que relacionam as pressões de cada fase através de capilaridade.

Nas equações de conservação de massa aparecem os potenciais das fases que podem ser escritos da seguinte maneira utilizando as Eqs.(3.19) e (3.20):

$$\Phi^w = P^o - P^{cow} + \gamma^w z \quad (3.21)$$

$$\Phi^o = P^o + \gamma^o z \quad (3.22)$$

$$\Phi^g = P^o + P^{cog} + \gamma^g z \quad (3.23)$$

No restante do texto a pressão da fase óleo P^o , será designada, para maior simplicidade, por apenas P .

Para completar o modelo matemático faz-se necessário especificar as condições de contorno e as condições iniciais. Neste trabalho aplicou-se a condição de fluxo nulo em todas as fronteiras do domínio. Para a condição inicial apenas definiu-se o campo de pressão e de frações mássicas iniciais.

Como pode ser visto nas equações acima, o modelo matemático adotado utiliza as frações mássicas e a pressão do óleo como variáveis primárias.

Maiores detalhes sobre o modelo matemático adotado, podem ser encontrados nos trabalhos de Cunha *et al.* (1994), Mota e Maliska (1994) e Maliska *et al.* (1997).

4 Formulação Numérica

Neste capítulo as equações diferenciais do modelo *Black-Oil* padrão são transformadas para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, e então, discretizadas via método dos volumes finitos. Utiliza-se a formulação totalmente implícita, ou seja, todas as variáveis são avaliadas no tempo de cálculo e o método de Newton é usado para linearização do sistema de equações algébricas discretizadas.

4.1 Transformação das Equações Governantes para o Domínio Computacional

As equações governantes (3.14), (3.15) e (3.17) são aplicadas à situação tridimensional, visando a solução de escoamentos de petróleo em reservatórios de geometrias irregulares. Tendo isto em mente, há dois caminhos a serem seguidos. Integrar as equações de conservação na geometria irregular ou transformá-las para um novo sistema coordenado. Neste trabalho utiliza-se o segundo caminho, que consiste em transformar as equações governantes para o novo sistema e então integrar as equações transformadas no domínio regular. O sistema de coordenadas curvilíneas generalizado segue uma transformação do tipo (ver Fig. 4.1):

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \gamma &= \gamma(x, y, z)\end{aligned}\tag{4.1}$$

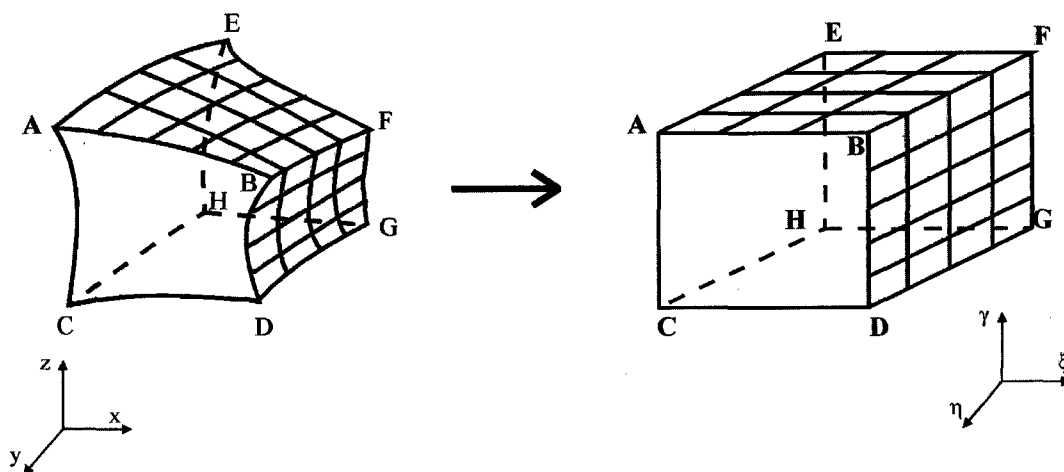


Figura 4.1 - Domínio físico e transformado

Feita a transformação, conforme procedimento descrito por Maliska (1995), obtém-se as equações governantes no plano computacional, como se segue:

- Equação da pressão

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m) + \frac{m^w + m^o + m^g}{J} = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_{11}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_{12}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_{13}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_{21}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_{22}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_{23}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_{31}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_{32}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_{33}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_{11}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \xi} + D_{12}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \eta} + D_{13}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \gamma} \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_{21}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \xi} + D_{22}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \eta} + D_{23}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \gamma} \right] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_{31}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \xi} + D_{32}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \eta} + D_{33}^g \frac{\partial \Phi^g}{\partial \gamma} \right]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

- Equação da conservação de massa do componente água

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m Z^w) + \frac{m^w}{J} = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

- Equação da conservação de massa do componente óleo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m Z^o) + \frac{X^{\infty} m^o}{J} = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[X^{\infty} \left(D_{11}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_{12}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_{13}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[X^{\infty} \left(D_{21}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_{22}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_{23}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) \right] + \\
 & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[X^{\infty} \left(D_{31}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \xi} + D_{32}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \eta} + D_{33}^o \frac{\partial \Phi^o}{\partial \gamma} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde,

$$D_{ij}^p = \frac{\lambda^p}{J} \left[\frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial x^j}{\partial x} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \frac{\partial x^j}{\partial y} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial x^j}{\partial z} \right] \quad (4.5)$$

com $i, j = 1, 2$ ou 3 e x^1, x^2 e x^3 são respectivamente, ξ, η e γ . Portanto, para exemplificar, D_{12}^w é

$$D_{12}^w = \frac{\lambda^w}{J} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \quad (4.6)$$

É importante notar que, nas Eqs.(4.2), (4.3) e (4.4) aparecem nove termos devidos às derivadas de potenciais de cada fase. Isto deve-se a não-ortogonalidade, pois em sistemas ortogonais ter-se-ia apenas três termos.

4.2 Discretização das Equações Governantes

Sendo a difusão numérica um reflexo do uso de funções de interpolação não exatas para avaliação das mobilidades nas faces, o presente trabalho aborda a discretização das equações governantes e o emprego do método de Newton, método de linearização das equações governantes resultantes da formulação totalmente implícita, focalizando sempre as etapas que concernem a avaliação das mobilidades nas interfaces dos volumes.

Trabalha-se, por simplicidade, apenas com a equação da conservação de massa do componente água, que daqui por diante é chamada apenas de equação da água.

Para se obter a equação aproximada é usado o método dos volumes finitos, que é baseado na integração da equação de balanço na sua forma conservativa. Integrando no tempo e no espaço a Eq.(4.3), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] \Delta V + \frac{m^w}{J} \Delta V \Delta t = \\ & \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_e \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t - \\ & \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_w \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t + \\ & \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_n \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t - \\ & \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_s \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t + \\ & \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_t \Delta \xi \Delta \eta \Delta t - \\ & \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_b \Delta \xi \Delta \eta \Delta t \end{aligned} \quad (4.7)$$

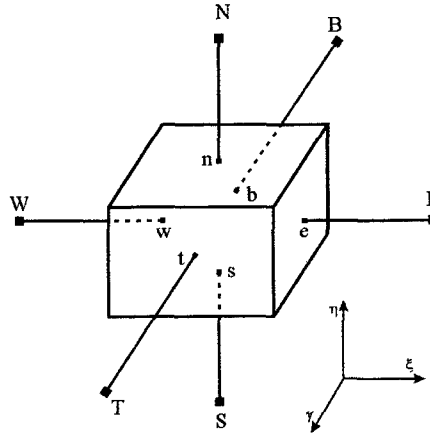


Figura 4.2 - Volume de controle elementar

As equações de conservação de massa do componente óleo e de massa total discretizadas são similares a Eq.(4.7).

Observa-se que a Eq.(4.7) necessita da avaliação das derivadas dos potenciais em todas as faces do volume de controle P, ver Fig. 4.2. Estas derivadas são avaliadas por diferença central e se uma malha ortogonal for usada serão envolvidos sete volumes no cálculo das derivadas diretas, originando uma matriz de sete diagonais. Por outro lado, se uma malha não ortogonal for usada serão requeridos dezenove volumes no cálculo das derivadas diretas e cruzadas, originando, desta vez, uma matriz de dezenove diagonais para ser resolvida.

Exemplificando, as derivadas dos potenciais na face leste são dados por

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right)_e = F_e \left[\frac{\Phi_E^w - \Phi_P^w}{\Delta \xi} \right] \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right)_e = F_e \frac{(F_{\eta SE}^E \Phi_{SE}^w + F_{\eta E}^E \Phi_E^w + F_{\eta NE}^E \Phi_{NE}^w + F_{\eta S}^P \Phi_S^w + F_{\eta P}^P \Phi_P^w + F_{\eta N}^P \Phi_N^w)}{\Delta \eta} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right)_e = F_e \frac{(F_{\gamma BE}^E \Phi_{BE}^w + F_{\gamma E}^E \Phi_E^w + F_{\gamma TE}^E \Phi_{TE}^w + F_{\gamma B}^P \Phi_B^w + F_{\gamma P}^P \Phi_P^w + F_{\gamma T}^P \Phi_T^w)}{\Delta \gamma} \quad (4.10)$$

Os coeficientes F são chamados de coeficientes de falha, ver Cunha (1996), e permitem que apenas uma equação de aproximação represente tanto volumes internos quanto volumes de fronteira, ou mesmo, volumes vizinhos a falhas geológicas. Considerando-se apenas os volumes internos e os volumes da fronteira, ter-se-ia 27 tipos de volumes de controle, e portanto, 27 equações distintas. Conseqüentemente, os coeficientes de falha permitem uma manipulação computacional mais simples das falhas geológicas do reservatório e da condição de contorno de impermeabilidade, que é a única implementada no simulador. Detalhes da construção dos coeficientes de falha podem ser vistos no apêndice B.

As derivadas dos potenciais das demais faces são obtidas da mesma forma e podem ser vistas no apêndice A.

Note que os termos D_{ij} , ver Eqs.(4.5) e (4.6), que envolvem as mobilidades, devem ser

calculados em todas as interfaces do volume de controle elementar. Portanto, as mobilidades que são armazenadas no centro do volume de controle, devem ser interpoladas. A qualidade do esquema de interpolação utilizado, para avaliar as mobilidades nas interfaces, influencia fortemente a acurácia da solução. Os próximos capítulos tratam justamente de esquemas que visam aproximar estes termos, sem a introdução de excessiva difusão numérica.

Visando mostrar que, além das próprias, também as derivadas das mobilidades devem ser avaliadas nas interfaces, será abordado o processo de linearização das equações.

4.3 Processo de Linearização: Método de Newton

Para aplicação do método de Newton, primeiramente as equações aproximadas devem ser escritas na forma residual, ou seja, desloca-se todos os termos da equação para um dos lados da igualdade, gerando-se as equações na forma residual com a seguinte forma:

$$F_p^p = F_p^p(p, Z^w, Z^o) \quad (4.11)$$

$$F_p^w = F_p^w(p, Z^w, Z^o) \quad (4.12)$$

$$F_p^o = F_p^o(p, Z^w, Z^o) \quad (4.13)$$

A Eq.(4.11) é a equação da conservação de massa total na forma residual no ponto P, ou equação residual da pressão, a Eq.(4.12) é a equação da conservação da massa do componente água na forma residual no ponto P, ou equação residual da água e a Eq.(4.13) é a equação da conservação de massa do componente óleo na forma residual no ponto P, ou equação residual do óleo. Note que as funções residuais são dependentes das variáveis primárias.

Tomado como exemplo o componente água, ver Eq.(4.7), a equação da água na forma residual tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
F_P^w = & -\frac{1}{J} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] \Delta V - \frac{m^w}{J} \Delta V \Delta t + \\
& \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_e \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t - \\
& \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_w \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t + \\
& \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_n \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t - \\
& \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_s \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t + \\
& \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_t \Delta \xi \Delta \eta \Delta t - \\
& \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_b \Delta \xi \Delta \eta \Delta t
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A partir deste ponto, o método de Newton lança mão da expansão das equações residuais em série de Taylor, truncando-as no termo de primeira ordem e gerando com as mesmas a matriz jacobiana. Por conseguinte, a expansão das funções residuais segue a forma:

$$(F_P^i)^{k+1} = (F_P^i)^k + \sum_{v \in X} \left(\frac{\partial F_P^i}{\partial X} \right)^k \Delta X = 0 \tag{4.15}$$

onde,

- i - representa uma das equações residuais. (P) para equação da pressão, (w) para equação da água e (o) para equação do óleo;
- X - representa as variáveis primárias (P, Z^w e Z^o) avaliadas no volume P e em todos os vizinhos presentes na equação residual.

Este método de linearização faz uso das derivadas das equações aproximadas, na forma residual, em relação a todos as variáveis primárias em todos os pontos presentes nas equações, como pode ser observado na Eq.(4.15). Logicamente, a maneira utilizada para se avaliar as derivadas dos potenciais e as mobilidades nas interfaces, definirá os pontos, ou melhor, os vizinhos pertencentes ao esquema, também conhecido por *stencil* do método numérico. Observando-se as derivadas dos potenciais, ver apêndice A, e supondo que as mobilidades são avaliadas nas faces por funções de interpolação que apenas levam em conta os dois vizinhos diretos de cada interface, chega-se ao *stencil* apresentado na Fig. 4.3.

Conforme indica a Fig. 4.3, o esquema numérico envolve 18 volumes vizinhos, (E, W, N, S, T, B, NE, NW, SE, SW, TE, TW, TN, TS, BE, BW, BN, BS), ao volume central P. Desta maneira constata-se que a matriz jacobiana resultante apresenta uma estrutura de 19 bandas. Além disso, cada volume da malha possui três incógnitas associadas a três equações de balanço, e portanto, cada elemento da matriz é formado por uma pequena matriz 3x3. Num primeiro momento, com o intuito de se evitar o peso computacional de se resolver um sistema linear de 19 bandas, decidiu-se derivar as equações residuais apenas pelas variáveis primitivas do volume P e de seus vizinhos diretos (E, W, N, S, T, B). Isto é análogo a considerar que cada equação residual dependa apenas do volume P e seus vizinhos diretos, ou seja,

desconsidera-se a dependência dos outros volumes (NE, NW, SE, SW, TE, TW, TN, TS, BE, BW, BN, BS). Assim, eliminando-se a dependência dos volumes diagonais das equações de resíduo, obtém-se uma matriz jacobiana formada por apenas 7 diagonais de elementos 3×3 . Destaca-se ainda, que a utilização desta técnica, torna possível a obtenção de uma matriz jacobiana, no sistema generalizado de coordenadas, de morfologia idêntica à obtida para um sistema cartesiano.

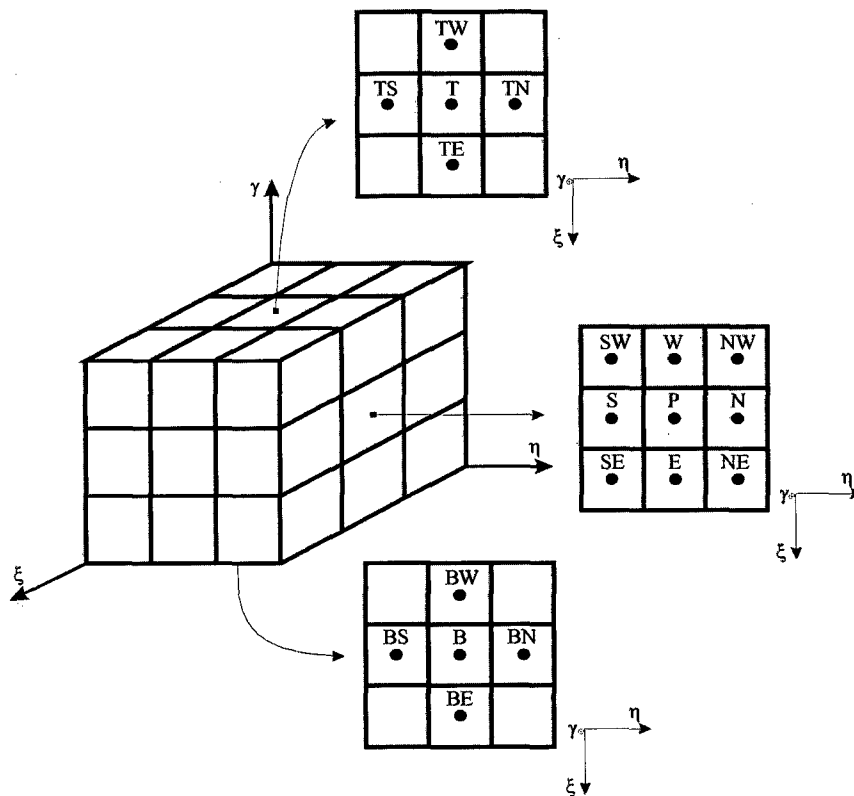


Figura 4.3 – Volumes presentes no esquema numérico

Este procedimento não implica na introdução de erros mas pode provocar redução na taxa de convergência do método de Newton dependendo da maior ou menor ortogonalidade da malha utilizada. Um estudo da influência destas aproximações na performance do método do Newton e na performance global da metodologia pode ser visto em Lucianetti *et al.* (1998).

Empregando-se a Eq.(4.15) na Eq.(4.14) e suas análogas, obtém-se

- Equação implícita da pressão

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_p^p}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} + \left(\frac{\partial F_p^p}{\partial P_p} \right) \Delta P_p + \left(\frac{\partial F_p^p}{\partial Z_p^w} \right) \Delta Z_p^w + \left(\frac{\partial F_p^p}{\partial Z_p^o} \right) \Delta Z_p^o + \\ & \sum_{NB} \left[\left(\frac{\partial F_p^p}{\partial P_{NB}} \right) \Delta P_{NB} + \left(\frac{\partial F_p^p}{\partial Z_{NB}^w} \right) \Delta Z_{NB}^w + \left(\frac{\partial F_p^p}{\partial Z_{NB}^o} \right) \Delta Z_{NB}^o \right] = -F_p^p \end{aligned} \quad (4.16)$$

- Equação implícita da água

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_p^w}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} + \left(\frac{\partial F_p^w}{\partial P_p} \right) \Delta P_p + \left(\frac{\partial F_p^w}{\partial Z_p^w} \right) \Delta Z_p^w + \left(\frac{\partial F_p^w}{\partial Z_p^o} \right) \Delta Z_p^o + \\ & \sum_{NB} \left[\left(\frac{\partial F_p^w}{\partial P_{NB}} \right) \Delta P_{NB} + \left(\frac{\partial F_p^w}{\partial Z_{NB}^w} \right) \Delta Z_{NB}^w + \left(\frac{\partial F_p^w}{\partial Z_{NB}^o} \right) \Delta Z_{NB}^o \right] = -F_p^w \end{aligned} \quad (4.17)$$

- Equação da conservação de massa do componente óleo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_p^o}{\partial P^{wf}} \right) \Delta P^{wf} + \left(\frac{\partial F_p^o}{\partial P_p} \right) \Delta P_p + \left(\frac{\partial F_p^o}{\partial Z_p^w} \right) \Delta Z_p^w + \left(\frac{\partial F_p^o}{\partial Z_p^o} \right) \Delta Z_p^o + \\ & \sum_{NB} \left[\left(\frac{\partial F_p^o}{\partial P_{NB}} \right) \Delta P_{NB} + \left(\frac{\partial F_p^o}{\partial Z_{NB}^w} \right) \Delta Z_{NB}^w + \left(\frac{\partial F_p^o}{\partial Z_{NB}^o} \right) \Delta Z_{NB}^o \right] = -F_p^o \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde,

NB - representa todos os volumes vizinhos considerados (E, W, N, S, T, B);

P^{wf} - é a pressão de fundo de poço e aparece na equação residual se houver poço no volume de controle em questão.

4.3.1 Derivação das Funções Residuais

Nota-se, como já foi mencionado, que as equações implícitas, (Eq.4.16, Eq.4.17 e Eq.4.18), fazem uso das derivadas das funções residuais em relação as variáveis primitivas, e que as mesmas, geraram um sistema linear, quando aplicadas a cada volume de controle da malha, cujos coeficientes são as derivadas.

Antes de se apresentar as derivadas das funções residuais, deve-se tecer um comentário sobre as derivadas cruzadas dos potenciais. Ponderando-se que a magnitude das mesmas é bastante menor do que das derivadas diretas, para a maioria das malhas utilizadas, considerou-se as derivadas cruzadas constantes, ou seja, são tratadas explicitamente em relação ao método de linearização, acreditando que este procedimento afetará pouco a convergência do método de Newton. É importante deixar claro que as mesmas são calculadas com todas as variáveis implicitamente, apenas o método de Newton, neste caso, as considera como constantes. Portanto, a derivada

$$\frac{\partial}{\partial P_e} \left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_e \quad (4.19)$$

é considerada nula. No entanto, ressalta-se que as derivadas cruzadas dos potenciais ainda

participarão dos coeficientes das matriz jacobiana. Como por exemplo, o termo

$$\left(D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right)_e \quad (4.20)$$

que aparece na Eq.(4.14), derivado em relação a Z_E^w é aproximado por

$$\frac{\partial}{\partial Z_E^w} \left(D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right)_e \cong \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right)_e \frac{\partial (D_{12}^w)_e}{\partial Z_E^w} \quad (4.21)$$

Cabe mencionar, que a exata influência desta prática na convergência do método de Newton merece ainda um estudo mais detalhado, mas este estudo não faz parte dos objetivos do presente trabalho.

Para apresentar as equações residuais de uma forma mais compacta, define-se

$$\left(\frac{\partial \Psi^p}{\partial \vec{n}} \right)_e = \left[G_{11} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_{12} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_{13} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right]_e \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^p}{\partial \vec{n}} \right)_w = \left[G_{11} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_{12} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_{13} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right]_w \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^p}{\partial \vec{n}} \right)_n = \left[G_{21} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_{22} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_{23} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right]_n \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^p}{\partial \vec{n}} \right)_s = \left[G_{21} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_{22} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_{23} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right]_s \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^p}{\partial \vec{n}} \right)_t = \left[G_{31} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_{32} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_{33} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right]_t \quad (4.26)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^p}{\partial \vec{n}} \right)_b = \left[G_{31} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} + G_{32} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} + G_{33} \frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right]_b \quad (4.27)$$

onde,

\vec{n} - é o vetor normal, ou seja, vetor com a mesma direção do vetor contravariante.

$$G_{ij} = \frac{D_{ji}^p}{\lambda^p} \quad (4.28)$$

Levando-se em conta, que as mobilidades são avaliadas nas faces, por funções de interpolação que utilizam apenas os dois vizinhos diretos de cada interface, expressa-se as derivadas da função residual da água por

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume P

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_P} \right) = & -\frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta V} \frac{\partial(\phi \rho^m Z^w)}{\partial P_P} - \frac{\partial m^w}{\partial P_P} \frac{\Delta V \Delta t}{J} + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial P_P} + \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial P_P} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_e - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial(\lambda^w)_w}{\partial P_P} - \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial P_P} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_w + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial(\lambda^w)_n}{\partial P_P} + \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial P_P} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_n - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial P_P} - \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial P_P} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_s + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial(\lambda^w)_t}{\partial P_P} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial P_P} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_t - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial(\lambda^w)_b}{\partial P_P} - \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial P_P} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_b
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^w} \right) = & -\frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta V} \frac{\partial(\phi \rho^m Z^w)}{\partial Z_P^w} - \frac{\partial m^w}{\partial Z_P^w} \frac{\Delta V \Delta t}{J} + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial Z_P^w} + \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_e - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial(\lambda^w)_w}{\partial Z_P^w} - \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_w + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial(\lambda^w)_n}{\partial Z_P^w} + \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_n - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial Z_P^w} - \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_s + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial(\lambda^w)_t}{\partial Z_P^w} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_t - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial(\lambda^w)_b}{\partial Z_P^w} - \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_b
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_P^o} \right) = & -\frac{1}{J} \frac{\Delta V}{\Delta V} \frac{\partial(\phi \rho^m Z^w)}{\partial Z_P^o} - \frac{\partial m^w}{\partial Z_P^o} \frac{\Delta V \Delta t}{J} + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial Z_P^o} + \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_e - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial(\lambda^w)_w}{\partial Z_P^o} - \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_w + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial(\lambda^w)_n}{\partial Z_P^o} + \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_n - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial(\lambda^w)_s}{\partial Z_P^o} - \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_s + \\
& \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial(\lambda^w)_t}{\partial Z_P^o} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_t - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial(\lambda^w)_b}{\partial Z_P^o} - \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_P^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_b
\end{aligned} \tag{4.31}$$

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume E

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_E} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial P_E} + \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial P_E} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_e \tag{4.32}$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_E^w} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial(\lambda^w)_e}{\partial Z_E^w} + \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_E^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_e \tag{4.33}$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_E^o} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e \frac{\partial (\lambda^w)_e}{\partial Z_E^o} + \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_E^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_e \quad (4.34)$$

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume W

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_W} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial (\lambda^w)_w}{\partial P_W} - \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial P_W} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_w \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_W^w} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial (\lambda^w)_w}{\partial Z_W^w} - \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_W^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_w \quad (4.36)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_W^o} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_w \frac{\partial (\lambda^w)_w}{\partial Z_W^o} - \left[D_{11}^w \frac{\partial}{\partial Z_W^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} \right) \right]_w \quad (4.37)$$

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume N

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_N} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial (\lambda^w)_n}{\partial P_N} + \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial P_N} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_n \quad (4.38)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_N^w} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial (\lambda^w)_n}{\partial Z_N^w} + \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_N^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_n \quad (4.39)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_N^o} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_n \frac{\partial (\lambda^w)_n}{\partial Z_N^o} + \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_N^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_n \quad (4.40)$$

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume S

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_S} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial (\lambda^w)_s}{\partial P_S} - \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial P_S} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_s \quad (4.41)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_S^w} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial (\lambda^w)_s}{\partial Z_S^w} - \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_S^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_s \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_S^o} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_s \frac{\partial (\lambda^w)_s}{\partial Z_S^o} - \left[D_{22}^w \frac{\partial}{\partial Z_S^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} \right) \right]_s \quad (4.43)$$

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume T

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_T} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial (\lambda^w)_t}{\partial P_T} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial P_T} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_t \quad (4.44)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_T^w} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial (\lambda^w)_t}{\partial Z_T^w} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_T^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_t \quad (4.45)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_T^o} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_t \frac{\partial (\lambda^w)_t}{\partial Z_T^o} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_T^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_t \quad (4.46)$$

- Derivadas da equação residual da água em relação as variáveis primitivas do volume B

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial P_B} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial (\lambda^w)_b}{\partial P_B} - \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial P_B} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_b \quad (4.47)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_B^w} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial (\lambda^w)_b}{\partial Z_B^w} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_B^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_b \quad (4.48)$$

$$\left(\frac{\partial F_P^w}{\partial Z_B^o} \right) = \left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_b \frac{\partial (\lambda^w)_b}{\partial Z_B^o} + \left[D_{33}^w \frac{\partial}{\partial Z_B^o} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right) \right]_b \quad (4.49)$$

Da mesma maneira pode-se deduzir as derivadas das equações residuais da pressão e do óleo.

4.3.2 Sistema Linear

A partir da Eq.(4.15), considerando-se a função residual no nível iterativo k+1 igual a zero, obtém-se o sistema linear a ser resolvido, que é dado por

$$A \cdot \Delta X = -F \quad (4.50)$$

onde,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i^p}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^p}{\partial Z_j^w} & \frac{\partial F_i^p}{\partial Z_j^o} \\ \frac{\partial F_i^w}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^w}{\partial Z_j^w} & \frac{\partial F_i^w}{\partial Z_j^o} \\ \frac{\partial F_i^o}{\partial P_j} & \frac{\partial F_i^o}{\partial Z_j^w} & \frac{\partial F_i^o}{\partial Z_j^o} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\Delta X_i = \begin{bmatrix} P_i^{k+1} - P_i^k \\ Z_i^{w^{k+1}} - Z_i^{w^k} \\ Z_i^{o^{k+1}} - Z_i^{o^k} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_i^p \\ F_i^w \\ F_i^o \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Com o sistema linear resolvido, ou seja, com ΔX calculado, tem-se o modo pelo qual as variáveis primárias podem ser avançadas durante o processo numérico.

5 Esquemas 1D para Discretização do Termo Convectivo em Leis de Conservação

Neste capítulo são apresentados vários esquemas utilizados para aproximação dos termos convectivos em equações de conservação, onde os mesmos são dominantes. Apresenta-se as funções de interpolação unidimensionais utilizadas para aproximação das mobilidades nas equações do petróleo, ver Eqs.(4.5), (4.6) e (4.7). Estas funções são: UDS, CDS, TVD e ENO. Cada função de interpolação é mostrada primeiramente em coordenadas cartesianas, depois transformada para coordenadas generalizadas e, em seguida, é explicado a sua implantação para as equações do petróleo.

Para facilitar a explanação dos esquemas, lança-se mão da equação de advecção linear

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

onde,

- S - variável a ser conservada;
- a - velocidade de advecção da variável S, positiva quando no sentido positivo do eixo x e negativa no caso contrário.

Através do método dos volumes finitos, aplicado apenas no espaço e considerando uma discretização igualmente espaçada, a Eq.(5.1) é discretizada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -a \left(\frac{S_e - S_w}{\Delta x} \right) \quad (5.2)$$

As funções de interpolação são usadas para aproximar os termos S_e e S_w .

5.1 Esquema UDS (*Upstream Differencing Scheme*)

O esquema a montante é o mais simples e estável de todos os esquemas, porém é um esquema de primeira ordem e altamente difusivo. Consequentemente, provoca erros de difusão numérica muitas vezes inaceitáveis.

Fazendo-se uso do esquema UDS para aproximação dos termos S_e e S_w da Eq.(5.2), obtém-se, para

$$a > 0 \rightarrow \begin{cases} S_w = S_w \\ S_e = S_p \end{cases} \quad (5.3)$$

e para

$$a < 0 \rightarrow \begin{cases} S_w = S_P \\ S_e = S_E \end{cases} \quad (5.4)$$

Portanto, a propriedade interpolada na interface assume o valor da propriedade do volume de controle que está atrás da interface em relação ao sentido de escoamento, neste caso definido pelo sinal da velocidade de advecção a .

Substituindo-se a Eq.(5.3) na Eq. (5.2), obtém-se

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a \left(\frac{S_P - S_W}{\Delta x} \right) = 0 \quad (5.5)$$

Aproximações equivalentes poderiam ser feitas para a derivada espacial da Eq.(5.1), pela expansão em série de Taylor, como se segue:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_P = \frac{S_P - S_W}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right)_P + O(\Delta x^2) \quad (5.6)$$

Substituindo o primeiro termo à direita da igualdade da equação anterior na Eq.(5.5), obtém-se

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{a \Delta x}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 \quad (5.7)$$

Portanto, mostra-se que a aproximação de um ponto a montante adiciona um termo análogo a um termo de difusão física da variável S . É este, conhecido por termo de difusão numérica, que ocasiona as suavizações das frentes de deslocamento semelhante ao comportamento apresentado por problemas com difusão física.

5.1.1 Aplicação do esquema UDS para o sistema generalizado

A aplicação da função de interpolação UDS para o sistema generalizado é idêntica ao apresentado nas Eqs.(5.3) e (5.4).

5.1.2 Aplicação do esquema UDS nas equações do petróleo

Tomando como exemplo a equação residual do componente água, ver Eq.(4.14), observa-se que necessita-se avaliar os termos D_{ij} , que envolvem as mobilidades que estão armazenadas no centro do volume de controle, em todas as faces. Além disto, como já foi explicado, faz-se necessário também aproximar as derivadas das mobilidades devido à utilização do método de Newton, ver Eqs.(4.29)-(4.49). As avaliações são realizadas da seguinte forma:

- Face leste (*east*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_e < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = \lambda_p^w \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = \frac{\partial \lambda_p^w}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_e > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = \lambda_E^w \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = \frac{\partial \lambda_E^w}{\partial Y_E} \end{cases} \quad (5.9)$$

- Face oeste (*west*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_w < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_w^w = \lambda_W^w \\ \frac{\partial \lambda_w^w}{\partial Y_p} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_w^w}{\partial Y_W} = \frac{\partial \lambda_W^w}{\partial Y_W} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_w > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_w^w = \lambda_p^w \\ \frac{\partial \lambda_w^w}{\partial Y_p} = \frac{\partial \lambda_p^w}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial \lambda_w^w}{\partial Y_E} = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

- Face norte (*north*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_n < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_n^w = \lambda_p^w \\ \frac{\partial \lambda_n^w}{\partial Y_p} = \frac{\partial \lambda_p^w}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial \lambda_n^w}{\partial Y_N} = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_n > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_n^w = \lambda_N^w \\ \frac{\partial \lambda_n^w}{\partial Y_P} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_n^w}{\partial Y_N} = \frac{\partial \lambda_N^w}{\partial Y_N} \end{cases} \quad (5.13)$$

- Face sul (*south*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_s < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_s^w = \lambda_S^w \\ \frac{\partial \lambda_s^w}{\partial Y_P} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_s^w}{\partial Y_S} = \frac{\partial \lambda_S^w}{\partial Y_S} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_s > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_s^w = \lambda_P^w \\ \frac{\partial \lambda_s^w}{\partial Y_P} = \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial \lambda_s^w}{\partial Y_S} = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

- Face superior (*top*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_t < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_t^w = \lambda_P^w \\ \frac{\partial \lambda_t^w}{\partial Y_P} = \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial \lambda_t^w}{\partial Y_T} = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_t > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_t^w = \lambda_T^w \\ \frac{\partial \lambda_t^w}{\partial Y_P} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_t^w}{\partial Y_T} = \frac{\partial \lambda_T^w}{\partial Y_T} \end{cases} \quad (5.17)$$

- Face inferior (*bottom*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_b < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_b^w = \lambda_B^w \\ \frac{\partial \lambda_b^w}{\partial Y_P} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_b^w}{\partial Y_B} = \frac{\partial \lambda_B^w}{\partial Y_B} \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_b > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_b^w = \lambda_P^w \\ \frac{\partial \lambda_b^w}{\partial Y_P} = \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial \lambda_b^w}{\partial Y_B} = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

onde,

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \bar{n}} \right)_f - \text{derivada normal do potencial na face } f, \text{ ver Eqs.(4.22) a (4.27).}$$

$$Y = P, Z^w, Z^o \quad (5.20)$$

As aproximações relativas à mobilidade para o componente óleo e para o componente gás seguem a mesmo procedimento.

5.2 Esquema CDS (*Central Differencing Scheme*)

Diferenças centrais é um esquema simples e de segunda ordem, porém, não é largamente utilizado na discretização de termos convectivos, por provocar o aparecimento de oscilações em regiões de gradientes fortes. Este esquema interpola um valor entre dois pontos assumindo um perfil linear entre os mesmos.

Fazendo-se uso do esquema CDS para aproximação dos termos S_e e S_w da Eq.(5.2), obtém-se

$$S_e = \frac{S_E + S_P}{2} \quad (5.21)$$

$$S_w = \frac{S_P + S_W}{2} \quad (5.22)$$

Neste ponto, pode-se introduzir um conceito que foi utilizado na implementação desta e de outras funções interpolação que são aqui discutidas. Khosla e Rubin (1974) sugeriram utilizar aproximações de alta ordem explícitas combinadas com aproximações implícitas de ordem mais baixa. Ferziger e Peric (1996) formalizaram as idéias de Khosla e Rubin da seguinte maneira:

$$\phi_e = \phi_e^L + (\phi_e^H - \phi_e^L)^* \cdot \beta \quad (5.23)$$

onde,

- ϕ_e - propriedade qualquer na face leste;
- ϕ_e^L - aproximação de baixa ordem da propriedade na face leste;
- ϕ_e^H - aproximação de alta ordem da propriedade na face leste;
- β - fator de relaxação do termo de alta ordem ($0 \leq \beta \leq 1$).

O termo entre parênteses é avaliado atrasado no tempo ou na iteração, ou seja, utiliza-se o valor da propriedade no tempo anterior ou na iteração anterior. Utilizar este termo atrasado equívale a utilizá-lo explicitamente e não considerá-lo como incógnita. O fator β combina a aproximação de alta ordem com a de baixa ordem e pode-se verificar, pela Eq.(5.23), que fazendo-se β igual a zero tem-se a aproximação de baixa ordem e fazendo-se β igual a um tem-se a aproximação de alta ordem.

A vantagem deste conceito, que tem aplicação geral, advém da possibilidade de manter inalterada tanto a forma da matriz de coeficientes quanto os valores da mesma. Sendo mais claro, pode-se dizer que, utilizando-se a idéia de Khosla e Rubin, o número de diagonais da matriz de coeficientes, chamada de jacobiana neste trabalho, não se alteram na aplicação de funções de interpolação de alta ordem, que ao aproximar uma propriedade, ou um fluxo na interface, levam em conta vários vizinhos além dos diretos. Estes termos que não participam da matriz jacobiana são adicionados a função residual. É necessário deixar claro que este procedimento não implica na introdução de erros no método, mas pode ocasionar uma menor velocidade de convergência.

Escrevendo a Eq.(5.21) na forma da Eq.(5.23), considerando a aproximação de baixa ordem o esquema UDS, tem-se

$$S_e = S_e^{UDS} + \left(\frac{S_E + S_P}{2} - S_e^{UDS} \right)^* \cdot \beta \quad (5.24)$$

rescrevendo a equação acima assumindo velocidade de advecção positiva, tem-se

$$S_e = S_P + \left(\frac{S_E - S_P}{2} \right)^* \cdot \beta \quad (5.25)$$

Vale ressaltar que β também pode ser visto como um fator que pondera a utilização da aproximação de baixa ordem e a de alta ordem na avaliação da propriedade.

5.2.1 Aplicação do esquema CDS para o sistema generalizado

A transformação da aproximação CDS para o sistema generalizado pode ser explicada através da utilização da série de Taylor para vetores, ou seja, expansão da série para uma direção qualquer. Portanto, avaliando a propriedade S na interface leste, em um sistema generalizado, pelo uso da expansão da série de Taylor, obtém-se

$$S_e = S_P + \frac{\vec{L}_P^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} S_e \quad (5.26)$$

onde,

\vec{L}_P^ξ - vetor comprimento na direção ξ do volume P, ver Eq.(5.27);
 $\vec{\nabla} S_e$ - gradiente da variável S na face leste.

$$\vec{L}_P^\xi = \left(\Delta\xi \cdot x_\xi \hat{i} + \Delta\eta \cdot y_\xi \hat{j} + \Delta\gamma \cdot z_\xi \hat{k} \right)_P \quad (5.27)$$

onde,

x_ξ, y_ξ, z_ξ - são métricas de transformação. Detalhes podem ser vistos em Maliska (1995).

Para as direções η e γ nas faces norte e superior respectivamente, tem-se

$$S_n = S_P + \frac{\vec{L}_P^\eta}{2} \cdot \vec{\nabla} S_n \quad (5.28)$$

$$S_t = S_P + \frac{\vec{L}_P^\gamma}{2} \cdot \vec{\nabla} S_t \quad (5.29)$$

onde,

\vec{L}_P^η - vetor comprimento na direção η do volume P, ver Eq.(5.30);
 \vec{L}_P^γ - vetor comprimento na direção γ do volume P, ver Eq. (5.31);

$$\vec{L}_P^\eta = \left(\Delta\xi \cdot x_\eta \hat{i} + \Delta\eta \cdot y_\eta \hat{j} + \Delta\gamma \cdot z_\eta \hat{k} \right)_P \quad (5.30)$$

$$\vec{L}_P^\gamma = \left(\Delta\xi \cdot x_\gamma \hat{i} + \Delta\eta \cdot y_\gamma \hat{j} + \Delta\gamma \cdot z_\gamma \hat{k} \right)_P \quad (5.31)$$

5.2.2 Aplicação do esquema CDS nas equações do petróleo

Primeiramente apresenta-se a aplicação da função de interpolação CDS sem a utilização do conceito de Khosla e Rubin, ou seja, a avaliação CDS está no mesmo tempo de cálculo, e portanto, as derivadas das mobilidades modificam-se em relação as apresentadas no esquema UDS.

Toma-se novamente como exemplo a equação residual do componente água (Eq.(4.14)). As avaliações são realizadas da seguinte forma, considerando uma malha cartesiana igualmente espaçada:

- Face leste (*east*)

$$\lambda_e^w = \frac{\lambda_P^w + \lambda_E^w}{2} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_p^w}{\partial Y_p} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_E^w}{\partial Y_E} \quad (5.34)$$

Como pode ser observado nas equações acima apresentadas, para o esquema CDS não é necessário conhecer a direção do escoamento. As avaliações para as outras faces seguem o mesmo procedimento.

Agora, utilizando o conceito de Khosla e Rubin escreve-se as aproximações da seguinte maneira, considerando agora o caso mais geral de discretização generalizada:

- Face leste (*east*)

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = \lambda_p^w + \left(\frac{\vec{L}_p^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_e^w \right)^* \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = \frac{\partial \lambda_p^w}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \vec{n}} \right)_e > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = \lambda_E^w - \left(\frac{\vec{L}_p^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_e^w \right)^* \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = \frac{\partial \lambda_E^w}{\partial Y_E} \end{cases} \quad (5.36)$$

Nota-se que com a utilização deste conceito as derivadas da mobilidade permanecem idênticas às derivadas do esquema UDS, e portanto, a matriz jacobiana é formada como se estivesse utilizando este esquema. O termo

$$\left(\frac{\vec{L}_p^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_e^w \right)^* \quad (5.37)$$

pode ser calculado de duas maneiras diferentes que são: atrasado na iteração ou no tempo. Se for usado atrasado na iteração, a matriz jacobiana calculada não será exata, o que, como já dito, pode diminuir a velocidade de convergência do método de Newton. Porém, se este termo for calculado atrasado no tempo, a matriz jacobiana passa a ser exata e melhores convergências podem ser obtidas, no entanto, os resultados simulados de um mesmo problema podem diferir quando se usa uma maneira ou outra. É claro que para simulações

com passo de tempo muito pequenos a diferença passa a ser praticamente inexistente. Neste trabalho optou-se por utilizar o termo atrasado na iteração, pois não ocasiona erros.

A obtenção das avaliações CDS para as faces W, N, S, T, B e para os componentes óleo e gás, em todas as faces, segue o mesmo procedimento das Eqs.(5.35) e (5.36).

5.3 Esquema TVD (*Total Variation Diminishing*)

Os métodos TVD são métodos próprios para problemas que apresentam descontinuidades, pois são de segunda ordem para regiões suaves e de primeira ordem em regiões que apresentam descontinuidades ou choques. Portanto, este varia de esquema numérico ao longo do domínio computacional, mas diferentemente dos esquemas híbridos como por exemplo o WUDS (*Weighted Upstream Differencing Scheme*), o TVD só muda para esquemas de primeira ordem em regiões vizinhas de descontinuidades. Este método foi desenvolvido por Harten (1983) com intuito de obter boas soluções para problemas convectivos dominantes, sem apresentar oscilações.

Considere um problema de valor inicial puro, problema de Cauchy, para uma lei de conservação hiperbólica,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0 \quad (5.38)$$

$$S(x,0) = S_0(x) \rightarrow \forall -\infty < x < \infty \quad (5.39)$$

Considera-se a condição inicial como sendo de variação total limitada, ou seja, a variação total não é infinita. Define-se variação total de uma função, neste caso o escalar S, como sendo

$$TV(S) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} |S(x + \Delta x) - S(x)| = \sum_{-\infty}^{\infty} |S_E - S_P| \quad (5.40)$$

Um esquema numérico é dito de variações totais decrescentes (TVD), segundo Harten (1983), se aproximar o escalar S com a seguinte propriedade:

$$TV(S) \leq TV(S^0) \quad (5.41)$$

Da Eq.(5.41) segue que na solução numérica obtida por um esquema TVD, um máximo local pode somente decrescer no tempo, enquanto que um mínimo local pode somente crescer, e conseqüentemente, não produz oscilações espúrias.

Considere uma aproximação numérica da Eq.(5.38) escrita da seguinte forma:

$$S_P = S_P^0 + C_e \Delta_e S - C_w \Delta_w S \quad (5.42)$$

onde,

$$\Delta_e S = S_E - S_P \quad (5.43)$$

$$\Delta_w S = S_P - S_W \quad (5.44)$$

$C_e = C(S_P, S_E)$ - função da propriedade nos volumes vizinhos. Para esquemas de três pontos são os dois vizinhos diretos;
 $C_w = C(S_W, S_P)$ - função da propriedade nos volumes vizinhos.

Sejam os coeficientes C da Eq.(5.42) que satisfazem as desigualdades:

$$C_e, C_w \geq 0 \quad (5.45)$$

$$0 \leq C_e + C_w \leq 1 \quad (5.46)$$

Então o esquema é TVD. Esta propriedade foi estabelecida por Harten (1983).

Harten (1983) também provou através de um teorema que um esquema monótono é TVD e que um esquema TVD preserva a monotonicidade, ou seja, se uma condição inicial S_0 é monótona, isto é, somente cresce ou decresce, então a solução em um tempo posterior deve apresentar a mesma propriedade. Além disto, realça-se que monotonicidade implica em TVD, que por sua vez implica em preservar a monotonicidade. Mas o inverso não é verdadeiro e somente para esquemas lineares é que as três definições recaem na mesma coisa.

5.3.1 Esquema TVD via inclinação limitada

Uma maneira de construir um esquema TVD é através da reconstrução linear por partes do escalar que está sendo conservado. Esta reconstrução deve ser limitada para que a função gerada não apresente novos máximos ou mínimos.

Integrando a Eq.(5.38) no tempo e no espaço discretizado, considerando-se o sistema cartesiano e malha igualmente espaçada, obtém-se

$$S_P = S_P^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_e(S) - F_w(S)] \quad (5.47)$$

onde,

$$F_e(S) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(S(x_P + \Delta x/2, t)) dt \quad (5.48)$$

$$F_w(S) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(S(x_P - \Delta x/2, t)) dt \quad (5.49)$$

Como pode-se observar, o cálculo das funções de fluxos, Eqs.(5.48) e (5.49), requerem o conhecimento da variável S na interface do volume, porém as mesmas são conhecidas apenas nos centros dos volumes de controle. Conclui-se que o projeto de um esquema de alta

resolução é, em essência, a aproximação não oscilatória da variável discreta conservada.

Van Leer (1977b) sugeriu fazer uma reconstrução linear por partes, tal que

$$S_p(x) = S_p + A_p(x - x_p), \quad \forall \quad x_p - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_p + \frac{\Delta x}{2} \quad (5.50)$$

onde,

A_p - é o gradiente local da variável S.

O gradiente local deve ser determinado e para isso utiliza-se os gradientes conhecidos mais próximos, que são:

$$A_w = \frac{S_p - S_w}{\Delta x} \quad (5.51)$$

$$A_e = \frac{S_e - S_p}{\Delta x} \quad (5.52)$$

O gradiente A_p é calculado através de uma média dos gradientes vizinhos

$$A_p = M(A_w, A_e) \quad (5.53)$$

A função M poderia ser a média aritmética simples

$$A_p = \frac{A_e + A_w}{2} \quad (5.54)$$

mas isto levaria a um esquema linear e, segundo o teorema de Godunov (1959), a oscilação. Uma maneira não oscilatória é obtida escolhendo-se a inclinação de menor valor absoluto. Matematicamente esta maneira é representada pela função *minmod* que é definida da seguinte maneira

$$\min \text{mod}(x, y) = \begin{cases} \text{sgn} \cdot \min(|x|, |y|) & \text{se } \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y) = \text{sgn} \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \quad (5.55)$$

Utilizando-se a função *minmod* para o cálculo do gradiente A_p , ver Eq.(5.56), é fácil verificar que se A_e e A_w forem de sinais contrários A_p torna-se zero, pois o volume P já é um máximo ou mínimo local e não deve-se aumentá-lo ou diminuí-lo, respectivamente. E se A_e e A_w tiverem o mesmo sinal A_p terá o valor do menor gradiente.

$$A_p = \min \text{mod}(A_w, A_e) \quad (5.56)$$

A Fig. 5.1 ilustra a reconstrução de S_p utilizando a Eq.(5.52). Observa-se que a reconstrução gera um mínimo local entre o volume W e P, e portanto, a função construída tem variação total maior do que a variável de origem. Por sua vez, a Fig. 5.2 visualiza a reconstrução utilizando a função *minmod*, que desta vez não cria máximo ou mínimo local.

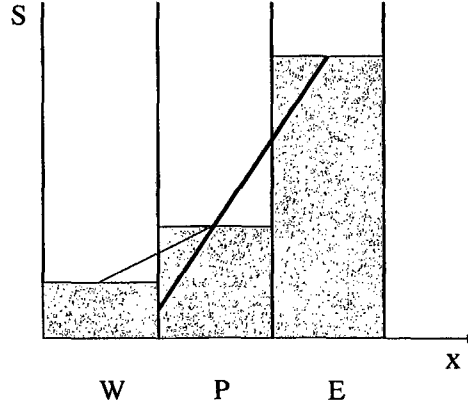


Figura 5.1 – Reconstrução de S_p utilizando a Eq. (5.52). Esta reconstrução dá origem ao esquema de Lax-Wendroff

Existem várias outras funções não oscilatórias, também conhecidas por limitadores de inclinação, que podem ser empregadas na construção de esquemas TVD. Uma delas é a função harmônica que pode ser escrita da seguinte forma:

$$A_p = \frac{|A_w|A_e + |A_e|A_w}{|A_w| + |A_e|} \quad (5.57)$$

Estas e outras funções serão apresentadas na próxima seção em forma de limitadores de fluxo.

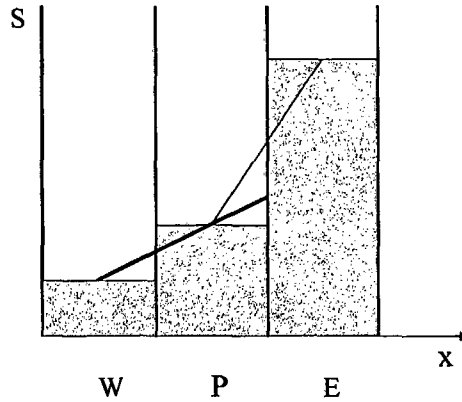


Figura 5.2 – Reconstrução de S_p utilizando a função *minmod*, Eq.(5.55).

Após a reconstrução da variável, há várias maneiras utilizadas para resolver a lei de conservação. Os métodos conhecidos por esquemas de alta ordem do tipo Godunov resolvem a lei de conservação exatamente com o uso da função reconstruída, e com isso, obtém a função solução do tempo $t+\Delta t$. Então, aplica-se nesta uma média espacial para calcular a solução discreta. Para leis de conservação não lineares é bastante difícil encontrar a solução exata, e para tanto, utiliza-se os conhecidos *solvers* de Riemann.

Também é possível resolver a lei de conservação aproximando-se diretamente as

Eqs.(5.48) e (5.49). Fazendo-se uso da função linear por partes reconstruída avalia-se as integrais da função de fluxo num certo tempo, por exemplo explicitamente, e substitui-se na Eq.(5.47).

Alguns métodos utilizam a Eq.(5.47) na forma semi-discreta e aproximam as Eqs. (5.48) e (5.49) como explicado acima, mas utilizam Runge-Kuta como forma de obter ordem mais alta na aproximação temporal.

5.3.2 Esquema TVD via fluxo limitado

Os métodos TVD também podem ser apresentados como uma combinação de um esquema de um ponto a montante, ou seja, um esquema de baixa ordem que funciona muito bem perto de descontinuidades, com um esquema de alta ordem, que funciona bem em regiões suaves. O grande desafio é empregar esta metodologia de maneira inteligente, ou seja, que o esquema de baixa ordem só seja utilizado perto de descontinuidades, e portanto, em todas as outras regiões seja utilizado o esquema de alta ordem. Esta característica é conseguida através da utilização do limitador de fluxo que de alguma maneira deve detectar as regiões que apresentam descontinuidades.

Integrando a Eq.(5.38) no tempo e no espaço discretizado, considerando-se o sistema cartesiano e malha igualmente espaçada, obtém-se

$$S_p = S_p^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_e(S) - f_w(S)] \quad (5.58)$$

O esquema TVD pode ser escrito, para aproximar os fluxos nas interfaces, da seguinte forma:

$$f_e = f_L + (f_H - f_L) * \Psi(r_e) \quad (5.59)$$

onde,

- f_L - aproximação de baixa ordem do fluxo na interface leste (e);
- f_H - aproximação de alta ordem do fluxo na interface leste (e);
- $\Psi(r_e)$ - limitador de fluxo.

Observa-se que quando o limitador de fluxo tem o valor 0 obtém-se a aproximação de baixa ordem e que quando este é 1 obtém-se a aproximação de alta ordem.

Os limitadores de fluxo podem ser reinterpretados como limitadores de inclinação, apresentados na seção 5.3.1. Seja M a função de média entre gradientes mais próximos do volume p, definida da seguinte maneira

$$M(x, y) = M(A_w, A_e) \quad (5.60)$$

possuindo a propriedade homogênea, ou seja,

$$\forall k, M(kx, ky) = kM(x, y) \Rightarrow \frac{M(x, y)}{y} = M\left(\frac{x}{y}, 1\right) \quad (5.61)$$

Portanto a média, inerentemente bidimensional, pode ser caracterizada por uma função

de uma dimensão,

$$\Psi(r) \quad (5.62)$$

onde,

$$r = \frac{x}{y} = \frac{A_w}{A_e} \quad (5.63)$$

É este ponto de vista matemático que corrobora a afirmação que a razão entre duas diferenças consecutivas, ou gradientes consecutivos, é uma maneira útil de monitorar a suavidade da solução. Pode se mostrar facilmente que a função $\psi(r)$ análoga a função *minmod*, ver Eq.(5.55), é

$$\Psi(r) = \max(0, \min(r, 1)) \quad (5.64)$$

Se r , Eq.(5.63), está próximo de 1 então a solução é suave perto do volume P , mas se r está longe de 1 então pode haver descontinuidade. Nota-se que este tipo de medida de suavidade falha próximo a extremos da variável conservada, S , onde o denominador pode ter um valor perto de 0 e r , portanto, pode ser muito grande, ou mesmo negativo, mesmo que a solução seja suave, ou seja, r sempre aplica a aproximação de baixa ordem para máximos ou mínimos locais mesmo sendo extremos de uma solução suave. Os trabalhos de Harten (1983), Osher e Chakravarthy (1984a, 1984b) e Sweby (1984) mostraram que esquemas TVD necessariamente degeneram para primeira ordem de acurácia em extremos locais, ou seja, há uma perpétua diminuição, ou aumento se for um mínimo local, causando uma pequena introdução de difusão numérica neste caso desnecessária. Será visto adiante que esquemas, conhecidos por ENO ou UNO, foram desenvolvidos para não apresentar este problema.

A aproximação de baixa ordem geralmente utilizada para o fluxo na interface, f_L , é o esquema de um ponto a montante. Por sua vez, a aproximação de alta ordem utilizada para o fluxo na interface, f_H , é o esquema Lax-Wendroff de segunda ordem, ver Sweby (1984). No entanto, como o objetivo deste trabalho é aplicar TVD e outros esquemas de alta resolução nas equações do petróleo, que formam um sistema de equações de características parabólicas-hiperbólicas, ver Eqs. (3.14), (3.15) e (3.17), observa-se que esquemas do tipo Lax-Wendroff não podem ser aplicados. A razão para isto é que este esquema expande uma série de Taylor no tempo, para avanço da solução, e faz uso da lei de conservação hiperbólica pura para substituição dos termos temporais de primeira e de segunda ordem por termos espaciais. Com isto o esquema de Lax-Wendroff obtém segunda ordem também na discretização temporal. Como as equações do petróleo não apresentam apenas a forma hiperbólica, faz-se uso no presente trabalho do esquema desenvolvido por Rubin e Blunt (1991). Estes, abrindo mão da segunda ordem no tempo, o que torna o esquema de Lax-Wendroff uma diferença central, utilizaram o esquema TVD via limitador de fluxo juntamente com esquema de Euler de integração no tempo, podendo então ser aplicado em equações hiperbólicas e parabólicas. Assim, a perda de precisão temporal é compensada com a maior aplicabilidade do esquema.

Portanto, substituindo os respectivos esquemas de baixa e alta ordem na Eq.(5.59), obtém-se

$$f_e = f_{UDS} + \left(\frac{f_E + f_P}{2} - f_{UDS} \right) * \Psi(r_e) \quad (5.65)$$

onde,

$$r_e = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{montante}}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_e} \quad (5.66)$$

Como pode ser observado, r depende da direção da velocidade, pois é formado por dois gradientes consecutivos avaliados numa direção coordenada de uma maneira *upwind* relativa ao sentido do fluxo, como mostra a Fig. 5.3.

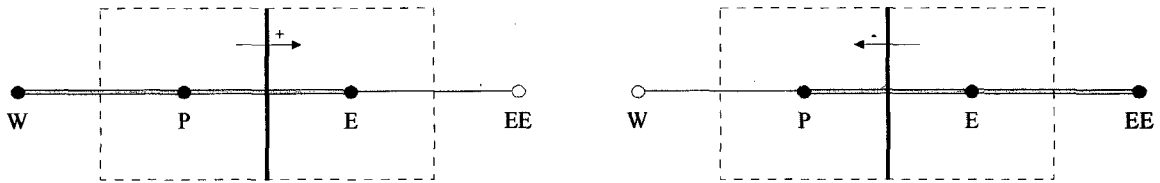


Figura 5.3 – Volumes utilizados para o cálculo de r , de acordo com a direção de fluxo

Rescrevendo as equações acima assumindo fluxo na direção positiva, tem-se

$$f_e = f_P + \left(\frac{f_E + f_P}{2} - f_P \right) * \Psi(r_e) \quad (5.67)$$

$$r_e = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_w}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_e} = \frac{f_P - f_W}{f_E - f_P} \quad (5.68)$$

É importante destacar que o termo que está sendo multiplicado pelo limitador de fluxo, ver Eqs.(5.59) e (5.67), também pode ser visto como um termo anti-difusivo que é adicionado ao esquema de um ponto a montante com o objetivo de remover a excessiva difusão numérica introduzida por este. Da Eq.(5.67) segue que:

$$\text{Termo anti-difusivo} = \frac{f_E - f_P}{2} \quad (5.69)$$

O termo anterior também é chamado de termo de correção.

Algumas restrições são impostas na função limitador de fluxo para que o esquema apresentado na Eq.(5.59) seja TVD. Aplicando o critério TVD, ver Eq.(5.41), chega-se nas restrições para o limitador de fluxo, que são:

$$\left| \frac{\Psi(r_e)}{r_e} - \Psi(r_w) \right| \leq 2 \quad (5.70)$$

e, que em pontos extremos, leia-se máximos e mínimos locais, o esquema deve ser de primeira ordem, ou seja,

$$\Psi(r) = 0 \text{ se } r \leq 0 \quad (5.71)$$

Substituindo-se a Eq.(5.71) em (5.70), obtém-se

$$0 \leq \frac{\Psi(r_e)}{r_e} - \Psi(r_w) \leq 2 \quad (5.72)$$

A Eq.(5.72) será satisfeita se

$$0 \leq \frac{\Psi(r)}{r} \leq 2 \text{ e } 0 \leq \Psi(r) \leq 2 \text{ para } \forall r \quad (5.73)$$

A região definida na equação acima, ver Fig. 5.4, contém todos os limitadores de fluxo TVD de primeira a n-ésima ordem e é definida pela expressão,

$$\Psi(r) = \min(2r, 2) \text{ para } r \geq 0 \quad (5.74)$$

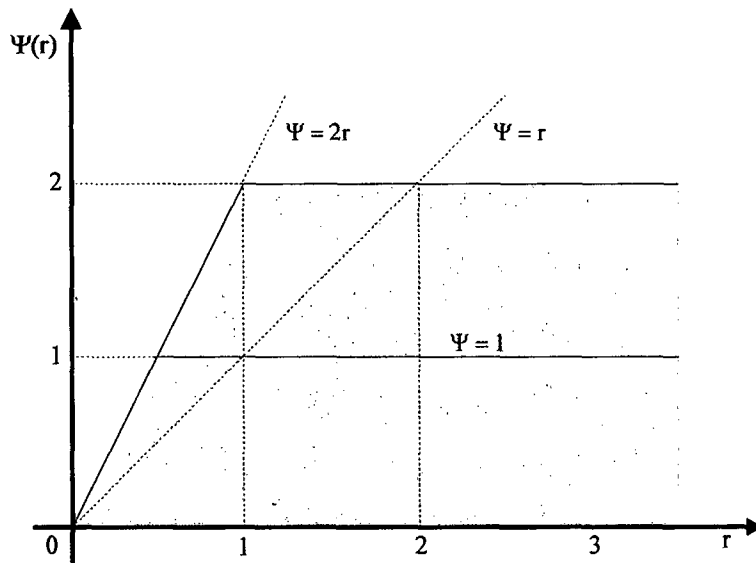


Figura 5.4 – Região TVD geral

Para obter segunda ordem de acurácia, a função limitadora de fluxo deve passar suavemente através do ponto $\Psi(1)=1$. Sweby (1984) achou, entretanto, que é melhor que Ψ seja uma combinação do esquema de Lax-Wendroff, que é simplesmente $\Psi(r)=1$, com o esquema de Warming-Beam, que é obtido por $\Psi(r)=r$. Impondo estas restrições adicionais obtém-se a região TVD de 2ª ordem de Sweby, ver Fig. 5.5. É importante lembrar, que este trabalho não utilizou o mesmos esquemas do artigo de Sweby, e sim, como já foi dito, o esquema desenvolvido por Rubin e Blunt, e portanto, quando o limitador de fluxo tem o valor 1 o TVD de Sweby recupera o esquema de Lax-Wendroff e o TVD de Rubin e Blunt recupera o esquema CDS. A tabela 5.1 apresenta os diferentes esquemas obtidos para alguns valores de

Ψ .

Tabela 5.1 – Casos particulares do esquema TVD

| $\Psi(r)$ | Sweby (1984) | Rubin e Blunt (1991) |
|-----------|--------------|------------------------|
| 0 | UDS | UDS |
| 1 | Lax-Wendroff | CDS |
| r | Warming-Beam | dois pontos a montante |
| 2 | - | um ponto a jusante |

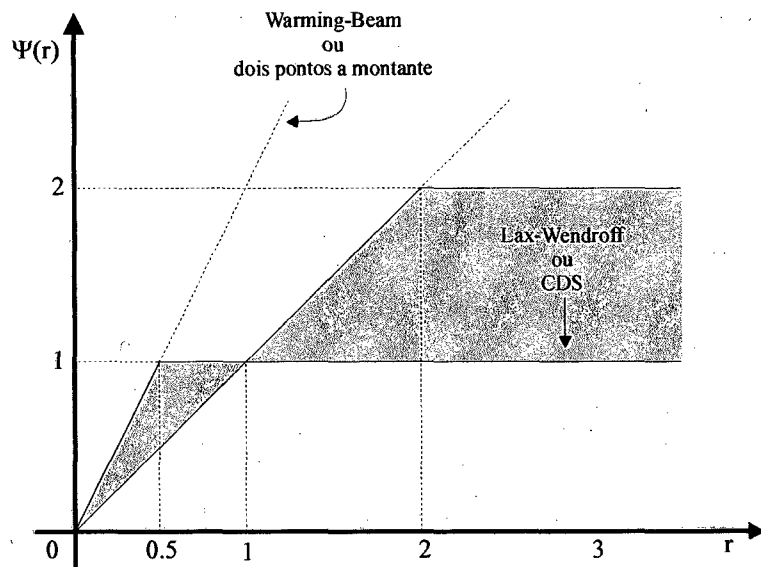


Figura 5.5 – Região TVD de 2ª ordem

Com a região de Sweby definida, Fig. 5.5, vários limitadores de fluxo podem ser definidos. Os limitadores utilizados neste trabalho são:

- *Minmod*

$$\Psi(r) = \max(0, \min(r, 1))$$

(5.75)

- Limitador de Van Leer

$$\Psi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|}$$

(5.76)

Pinto (1991) demonstrou que este limitador, utilizado na Eq.(5.67), é equivalente a calcular o termo anti-difusivo como a média harmônica, ver Eq.(5.57), das derivadas do fluxo na face leste e na face oeste, ou seja,

$$f_e = f_p + \frac{1}{2} \left[\frac{2(f_E - f_p)(f_p - f_W)}{(f_E - f_p) + (f_p - f_W)} \right] \quad (5.77)$$

- Limitador de 3ª ordem

Este limitador foi originalmente proposto por Gupta (1990) e é definido por

$$\Psi(r) = \frac{1}{3}(2+r) \quad (5.78)$$

Pinto (1991), notou que, em certos trechos, o limitador de terceira ordem sai fora da região de Sweby, ou seja, em certos trechos ele não é TVD. Por conta disto, sugere restringir o limitador de 3ª ordem aos limites da região de Sweby. Desta forma, o método é de terceira ordem de acurácia em regiões suaves, com exceção de regiões onde se faz necessário limitá-lo, onde passa a ser de segunda ordem, ver Fig. 5.6.

- *Superbee*

Este limitador foi introduzido por Roe (1981). É definido por

$$\Psi(r) = \max(0, \min(r, 1)) \quad (5.79)$$

A Fig. 5.7 mostra os limitadores que estão na fronteira da região TVD de 2ª ordem.

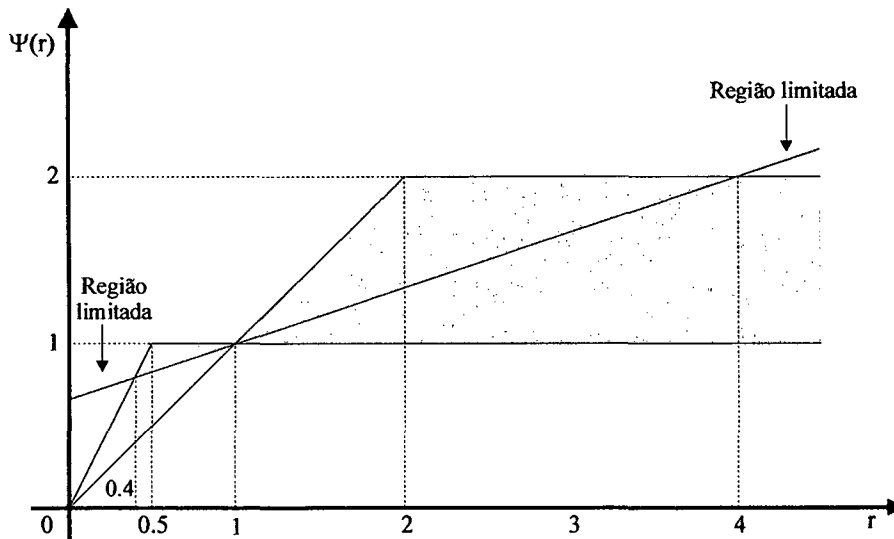


Figura 5.6 – Limitador de 3ª ordem

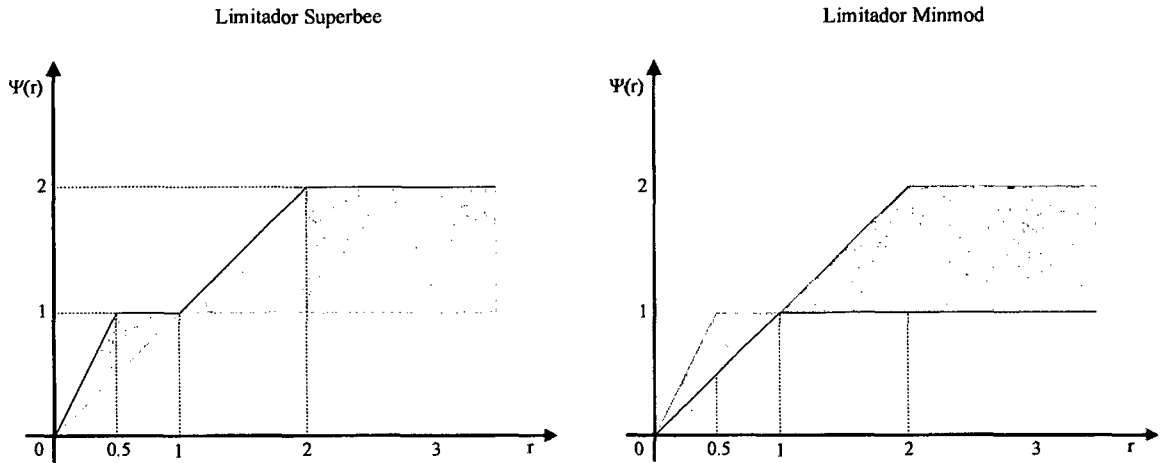


Figura 5.7 – Limitadores delimitadores da fronteira da região de segunda ordem

Deve-se observar que a equação de aproximação dos fluxos nas interfaces pelo método TVD, Eq.(5.59), guarda grande semelhança com a Eq.(5.23), com o fator β substituído por um limitador TVD. Portanto, a aplicação deste esquema pode seguir também as idéias propostas por Khosla e Rubin.

5.3.3 Aplicação do esquema TVD no sistema generalizado

Os métodos TVD para o sistema generalizado podem ser apresentados como uma combinação de um esquema de baixa ordem com um esquema de alta ordem, da mesma forma que para o sistema cartesiano. Para tanto, basta transformar ambos os esquemas para o sistema curvilíneo generalizado. É bom lembrar que este trabalho utiliza o esquema UDS, como esquema de baixa ordem, e o esquema CDS, como o esquema de alta ordem.

Como apresentado na seção 5.1.1 o esquema de um ponto a montante não se altera quando transformado para o sistema generalizado. Então, o esquema fica dado pelas Eqs. (5.3) e (5.4).

Na seção 5.2.1 foi apresentado a transformação do função interpolação CDS para o sistema generalizado. As Eqs.(5.26), (5.28) e (5.29) representam a aplicação do esquema CDS nas direções ξ , η e γ avaliadas nas faces leste, norte e superior, respectivamente.

Com os esquemas transformados, apresenta-se o esquema TVD, no sistema generalizado, nas três direções no sentido positivo e negativo dos eixos coordenados. Para exemplificar mostra-se os esquemas nas faces leste, norte e superior das respectivas direções.

- Face leste (*east*) – sentido positivo

$$f_e = f_p + A_e * \Psi(r_e) \quad (5.80)$$

onde,

A_e - termo de segunda ordem, ver Eq.(5.82);

r_e - razão de termos sucessivos de segunda ordem, ver Eq. (5.81);

$$r_e = \frac{A_w}{A_e} \quad (5.81)$$

$$A_e = \frac{\vec{L}_P^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} f_e \quad (5.82)$$

$$A_w = \frac{\vec{L}_P^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} f_w \quad (5.83)$$

- Face leste (*east*) – sentido negativo

$$f_e = f_E - A_e * \Psi(r_e) \quad (5.84)$$

onde,

$$r_e = \frac{A_{ee}}{A_e} \quad (5.85)$$

$$A_e = \frac{\vec{L}_E^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} f_e \quad (5.86)$$

$$A_{ee} = \frac{\vec{L}_E^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} f_{ee} \quad (5.87)$$

ee - face leste do volume E.

- Face norte (*north*) – sentido positivo

$$f_n = f_P + A_n * \Psi(r_n) \quad (5.88)$$

onde,

$$r_n = \frac{A_s}{A_n} \quad (5.89)$$

$$A_n = \frac{\vec{L}_P^\eta}{2} \cdot \vec{\nabla} f_n \quad (5.90)$$

$$A_s = \frac{\vec{L}_P^\eta}{2} \cdot \vec{\nabla} f_s \quad (5.91)$$

- Face norte (*north*) – sentido negativo

$$f_n = f_N - A_n * \Psi(r_n) \quad (5.92)$$

onde,

$$r_n = \frac{A_{nn}}{A_n} \quad (5.93)$$

$$A_n = \frac{\vec{L}_N^\eta}{2} \cdot \vec{\nabla} f_n \quad (5.94)$$

$$A_{nn} = \frac{\vec{L}_N^\eta}{2} \cdot \vec{\nabla} f_{nn} \quad (5.95)$$

nn - face norte do volume N.

- Face superior (*top*) – sentido positivo

$$f_t = f_P + A_t * \Psi(r_t) \quad (5.96)$$

onde,

$$r_t = \frac{A_b}{A_t} \quad (5.97)$$

$$A_t = \frac{\vec{L}_P^\gamma}{2} \cdot \vec{\nabla} f_t \quad (5.98)$$

$$A_b = \frac{\vec{L}_P^\gamma}{2} \cdot \vec{\nabla} f_b \quad (5.99)$$

- Face superior (*top*) – sentido negativo

$$f_t = f_T - A_t * \Psi(r_t) \quad (5.100)$$

onde,

$$r_t = \frac{A_u}{A_t} \quad (5.101)$$

$$A_t = \frac{\vec{L}_T^\gamma}{2} \cdot \vec{\nabla} f_t \quad (5.102)$$

$$A_u = \frac{\vec{L}_T^\gamma}{2} \cdot \vec{\nabla} f_u \quad (5.103)$$

tt - face superior do volume T.

5.3.4 Aplicação do esquema TVD nas equações do petróleo

O esquema TVD, segundo Wolcott *et al.* (1996), pode ser aplicado nas equações do petróleo de várias maneiras. Pode-se aplicá-lo, nos fluxos como um todo, termos entre colchete onde o divergente está aplicado nas Eqs.(3.14), (3.15) e (3.17), como fez Rubin e Blunt (1990), ou, nas permeabilidades relativas, como fez Pinto (1991) e Mota (1994), ou, nas mobilidades, ou, no fluxo fracionário, ou ainda, nas próprias concentrações dos componentes.

Neste trabalho aplicou-se o esquema TVD nas mobilidades, que é composta pelas permeabilidades relativas, para um sistema de coordenadas generalizado, semelhante ao realizado por Mota (1994). Utilizou-se também o conceito de Khosla e Rubin, ou seja, o termo corretivo do esquema TVD atrasado no tempo ou na iteração, como sugerido por Pinto (1991). Por conseguinte, as derivadas das mobilidades serão idênticas as apresentadas pelo esquema UDS.

Tomando novamente como exemplo a equação residual do componente água, ver Eq.(4.14). As avaliações são realizadas da seguinte forma:

- Face leste (*east*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_e < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = \lambda_p^w + \left(\frac{\vec{L}_p^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_e^w * \Psi(r_e^w) \right)^* \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = \frac{\partial \lambda_p^w}{\partial Y_p} \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = 0 \end{cases} \quad (5.104)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_e > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = \lambda_E^w - \left(\frac{\vec{L}_p^\xi}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_e^w * \Psi(r_e^w) \right)^* \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_p} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = \frac{\partial \lambda_E^w}{\partial Y_E} \end{cases} \quad (5.105)$$

As avaliações relativas à mobilidade para as outras faces da equação da água e para o componente óleo e gás seguem o mesmo procedimento.

5.4 Esquema ENO (*Essentially Non-Oscillatory*)

É sabido que os esquemas TVD, apesar de seus méritos na solução de sistema de equações hiperbólicas, apresentam o efeito de não serem capazes de distinguir entre um perfil de choque e um extremo suave. Harten observou que o problema advinha da imposição do critério TVD (*Total Variation Diminishing*), que é muito restrito e, portanto, sugeriu que os esquemas, que tratam da captura de choques, passassem a obedecer o critério TVB (*Total Variation Bounded*).

Apresenta-se nesta seção o primeiro ENO desenvolvido, Harten e Osher (1987), e o ENO de Shu e Osher (1988a, 1988b) que é o esquema essencialmente não oscilatório empregado neste trabalho.

5.4.1 ENO de Harten e Osher

Uma maneira sistemática de construir esquemas TVB foi desenvolvido por Harten e Osher (1987) e foram chamados de ENO (*Essentially Non-Oscillatory*). Neste artigo os autores desenvolveram um esquema ENO de segunda ordem e mais tarde Harten *et al.* (1987) estenderam este método para uma ordem n .

O esquema ENO requer apenas que o número de extremos locais não cresça na solução numérica. Esta característica é obedecida por todos os esquemas TVD, mas, diferentemente destes, os esquemas essencialmente não oscilatório não requerem que os valores de cada extremo local não cresçam a cada passo de tempo, e até mesmo, permitem ocasionalmente acentuação de um extremo local.

Considerando um problema de valor inicial de uma lei de conservação hiperbólica, ver Eq.(5.38), um esquema numérico é dito de variações totais limitadas (TVB), segundo Harten e Osher (1987), se aproximar o escalar S com a seguinte propriedade:

$$TV(S) \leq C * TV(S^0) \quad (5.106)$$

onde,

- TV - variação total, ver Eq.(5.40);
- C - valor pertencente ao conjunto dos reais.

Observe que o esquema TVD satisfaz trivialmente a Eq.(5.106) com C igual a 1.

O esquema ENO de Harten e Osher pode ser resumido como sendo uma reconstrução linear por partes não oscilatória dos valores de cada volume da solução, depois uma evolução no tempo através da solução de um problema de valor inicial, onde o valor inicial é o valor da solução numérica no passo de tempo anterior, e por fim uma média desta solução em cada volume. Este esquema é bastante semelhante ao esquema TVD via inclinação limitada, apresentado na seção 5.3.1, no entanto, diferencia-se deste na reconstrução da variável

conservada. Ao invés de utilizarem a reconstrução sugerida por Van Leer, Eq.(5.50), utilizaram a seguinte reconstrução:

$$S_p(x) = S_p + A_p(x - x_p), \quad \forall \quad x_p - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_p + \frac{\Delta x}{2} \quad (5.107)$$

onde,

A_p - é o gradiente local da variável S, dado pela Eq.(5.108).

$$A_p = \min \text{ mod } \left(\frac{dQ_w}{dx}, \frac{dQ_e}{dx} \right) \quad (5.108)$$

$$Q_w = S_w + \frac{S_p - S_w}{\Delta x}(x - x_w) + \frac{1}{2} \frac{D_w(S)}{\Delta x^2} * (x - x_w)(x - x_p) \quad (5.109)$$

$$Q_e = S_p + \frac{S_e - S_p}{\Delta x}(x - x_p) + \frac{1}{2} \frac{D_e(S)}{\Delta x^2} * (x - x_p)(x - x_e) \quad (5.110)$$

Como pode ser observado, a função Q é uma interpolação parabólica por partes. Esta função é construída de maneira não oscilatória pois o termo D é definido da seguinte maneira:

$$D_w = \min \text{ mod } (D_w, D_p) \quad (5.111)$$

$$D_e = \min \text{ mod } (D_p, D_e) \quad (5.112)$$

onde,

$$D_j = S_{j+1} - 2S_j + S_{j-1} \quad (5.113)$$

j - pode assumir o valor de W, P ou E, nas respectivas definições.

Os resultados mostrados por estes artigos mostram que a aplicação do esquema ENO traz melhores soluções tanto para problemas lineares quanto para problemas não-lineares, apresentando estas descontinuidades ou não. Os autores também mostram que em relação a norma infinita (L_∞), ou seja, o maior erro entre todos os volumes em comparação com a solução analítica, o esquema TVD apresenta erros da ordem de $\Delta x^{3/2}$ e que o esquema ENO apresenta, por sua vez, erros da ordem de Δx^2 .

5.4.2 ENO de Shu e Osher

Shu e Osher (1988a, 1988b) sugeriram um modo eficiente de construir esquemas ENO possibilitando uma implementação bastante mais simples que a sugerida por Harten e Osher (1987) e Harten *et al.* (1987). Este esquema é baseado nos fluxos ao invés das médias nos volumes, ver seção 5.4.1, e utiliza o método de Runge-Kutta para discretização temporal. Com isto, não é necessário o passo de reconstrução e nem a discretização temporal pela metodologia de Lax-Wendroff, o que facilita sobremaneira o seu uso em problemas

multidimensionais.

Em resumo, este método é baseado na interpolação de dois polinômios na vizinhança a montante e a jusante da fronteira, onde o fluxo precisa ser conhecido. Para que a interpolação obtida seja suave localmente, os polinômios são comparados e o menor em valor absoluto é utilizado. Estes polinômios são construídos através de diferenças divididas.

Mostra-se a implementação do esquema ENO de Shu e Osher denominado pelos autores de ENO-Roe, considerando primeiramente discretização espacial cartesiana. Com o intuito de explicar esta metodologia para uma ordem n de acurácia, utiliza-se nesta seção uma notação diferente para os volumes e seus vizinhos. O volume P será substituído por j e seus vizinhos E e W por $j+1$ e $j-1$, respectivamente. As interfaces terão o valor da média de seus vizinhos diretos, e portanto, a face leste é substituída por $j+1/2$ e assim por diante para as outras faces.

Considerando a lei de conservação hiperbólica dada pela Eq.(5.38), o esquema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$f_{j+1/2} = \left. \frac{dQ_{j+1/2}(x)}{dx} \right|_{x=x_{j+1/2}} \quad (5.114)$$

onde,

$Q_{j+1/2}(x)$ - é o polinômio interpolador não oscilatório avaliado neste caso na face $j+1/2$ (leste).

$Q_{j+1/2}$ é definido por,

$$Q_{j+1/2}(x) = Q^{(r+1)}(x) \quad (5.115)$$

onde,

$r+1$ - é o grau do polinômio interpolador.

Para construir o polinômio $Q^{(r+1)}$ segue-se o seguinte algoritmo:

- I Computa-se a tabela de diferenças divididas de f .
A primeira diferença dividida é dada por,

$$f[S_j] = f(S_j) \quad (5.116)$$

E a segunda por,

$$f[S_j, S_{j+1}] = \frac{f(S_{j+1}) - f(S_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad (5.117)$$

A k -ésima diferença dividida é definida por,

$$f[S_j, \dots, S_{j+k}] = \frac{f[S_{j+1}, S_{j+2}, \dots, S_{j+k}] - f[S_j, S_{j+1}, \dots, S_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \quad (5.118)$$

- II Se

$$a_{j+1/2} \geq 0 \Rightarrow k_{\min}^1 = j \quad (5.119)$$

$$a_{j+1/2} \leq 0 \Rightarrow k_{\min}^1 = j + 1 \quad (5.120)$$

onde,

a - é a velocidade de Roe, definida na Eq.(5.121);

$$a_{j+1/2} = \frac{f(S_{j+1}) - f(S_j)}{S_{j+1} - S_j} \quad (5.121)$$

III Defini-se,

$$Q^{(1)}(x) = f\left(S_{k_{\min}^1}\right) * \left(x - x_{k_{\min}^1 - 1/2}\right) \quad (5.122)$$

IV Para encontrar Q de ordem mais alta do que 1, defini-se,

$$a^l = \frac{1}{l} f\left[S_{k_{\min}^{l-1}}, \dots, S_{k_{\min}^{l-1} + l - 1}\right] \quad (5.123)$$

$$b^l = \frac{1}{l} f\left[S_{k_{\min}^{l-1} - 1}, \dots, S_{k_{\min}^{l-1} + l - 2}\right] \quad (5.124)$$

Se

$$|a^l| \geq |b^l| \Rightarrow c^l = b^l, \quad k_{\min}^l = k_{\min}^{l-1} - 1 \quad (5.125)$$

$$|a^l| < |b^l| \Rightarrow c^l = a^l, \quad k_{\min}^l = k_{\min}^{l-1} \quad (5.126)$$

Observa-se que é este passo do algoritmo responsável por escolher o polinômio de menor valor absoluto, ou seja, aplica-se a função *minmod* com a e b como argumentos.

V Por último defini-se $Q^{(l)}(x)$, por

$$Q^{(l)}(x) = Q^{(l-1)}(x) + c^l \prod_{k=k_{\min}^{l-1}}^{k_{\min}^{l-1} + l - 1} (x - x_{k-1/2}) \quad (5.127)$$

Este esquema é de ordem $r+1$ em regiões suaves, exceto em pontos de derivada nula onde degenera para ordem de acurácia r . Em regiões de descontinuidade aplica apenas o esquema de primeira ordem UDS.

O ENO de Shu e Osher, tal como o TVD, pode ser visto como um esquema de um ponto a montante adicionado de termos anti-difusivos, visando minimizar a excessiva difusão

numérica introduzida pelo esquema UDS.

Para uma discretização cartesiana igualmente espaçada ter-se-ia os polinômios a_2 e b_2 dados por,

$$a_2 = \frac{f_E - f_P}{\Delta x} \quad (5.128)$$

$$b_2 = \frac{f_P - f_W}{\Delta x} \quad (5.129)$$

Observa-se que estes polinômios são os gradientes que aparecem no esquema TVD. Pode-se afirmar que o primeiro termo corretivo é idêntico ao termo anti-difusivo do esquema TVD para malha cartesiana, igualmente espaçada ou não, utilizando a função limitadora Minmod.

É importante destacar que os termos corretivos do ENO podem ser tratados da mesma maneira que o termo anti-difusivo do TVD, ou seja, atrasados na iteração ou no tempo.

5.4.3 Aplicação do esquema ENO de Shu e Osher no sistema generalizado

Chen *et al.* (1991) aplicaram o esquema ENO nas equações de petróleo para o sistema cartesiano e mostraram, para o problema de geometria *five-spot*, bons resultados em relação ao esquema UDS e TVD *minmod*. Baseados nestes resultados aplica-se este esquema nas equações do petróleo apresentadas neste trabalho. Para tanto, faz-se necessário transformar o esquema ENO do sistema cartesiano para o sistema generalizado, o que, pelo conhecimento deste autor, nunca foi feito.

Nesta seção apresenta-se a proposta de aplicação do esquema ENO para uma discretização espacial generalizada. A proposta garante duas características. A primeira delas é que o esquema ENO de Shu e Osher transformado recupere o esquema original, apresentado na seção 5.4.2, quando aplicado a uma malha cartesiana. A segunda característica é transformar o esquema, de uma maneira tal que converta-se no esquema TVD generalizado com limitador *minmod* quando apenas os dois primeiros termos são usados.

A transformação do esquema é baseada, principalmente, na transformação da tabela de diferenças divididas para o sistema generalizado. Adota-se a seguinte notação, para uma representação mais compacta das equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= \Omega_x & \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= \Omega_\xi \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \Omega_y & e \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} &= \Omega_\eta \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= \Omega_z & \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} &= \Omega_\gamma \end{aligned} \quad (5.130)$$

onde,

Ω - representa uma variável qualquer.

A tabela de diferenças divididas para um argumento permanece inalterada quando transformada, no entanto, a de dois argumentos, ver Eq.(5.117), pode ser reconhecida como a aproximação de segunda ordem da derivada primeira, que na direção x é

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_e = f[S_P, S_E] + O(\Delta x^2) \quad (5.131)$$

então, segue-se a sua transformação para o sistema generalizado,

$$f[S_P, S_E] = \frac{f(S_E) - f(S_P)}{x_E - x_P} \Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_\xi} \right|_e \quad (5.132)$$

onde,

- ⇒ - identifica a transformação da diferença dividida do sistema cartesiano para o generalizado;
- \hat{e}_ξ - vetor de base covariante na direção ξ normalizado, ver Eq.(5.133), maiores detalhes Maliska (1995).

$$\hat{e}_\xi = \frac{\vec{e}_\xi}{|\vec{e}_\xi|} = \frac{x_\xi \hat{i} + y_\xi \hat{j} + z_\xi \hat{k}}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}} \quad (5.133)$$

A derivada de f na direção do vetor covariante é dado por,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_\xi} \right|_e = (\vec{\nabla} f \cdot \hat{e}_\xi)_e = \left[\frac{Y_1 f_\xi + Y_2 f_\eta + Y_3 f_\gamma}{\sqrt{g_{11}}} \right]_e \quad (5.134)$$

onde,

- g_{11} - componente 1x1 do tensor métrico, ver Eq.(5.135);

$$g_{11} = x_\xi x_\xi + y_\xi y_\xi + z_\xi z_\xi \quad (5.135)$$

$$Y_i = X_x^i x_\xi + X_y^i y_\xi + X_z^i z_\xi \quad (5.136)$$

$$X^1 = \xi \quad X^2 = \eta \quad X^3 = \gamma \quad (5.137)$$

Para que a segunda característica seja atendida a Eq.(5.132) tem que ser modificada para

$$f[S_P, S_E] = \frac{\partial f_e}{\partial \hat{e}_\xi \text{ volume a montante}} \quad (5.138)$$

onde \hat{e}_ξ é avaliado no volume imediatamente a montante da direção do escoamento na face interpolada.

Após a definição acima. é assumido que a diferença dividida de três argumentos é dada por,

$$f[S_P, S_E, S_{EE}] = \frac{f[S_E, S_{EE}] - f[S_P, S_E]}{\sum_{k=P}^E (\sqrt{g_{11}})_{k+1/2}} \quad (5.139)$$

e da mesma maneira para o restante da tabela de diferenças divididas.

Agora é possível avaliar f numa forma generalizada. Por exemplo, na face leste, f é

aproximado por

$$f_{j+1/2} = Q^{(r+1)}(x_e) \quad (5.140)$$

Novamente polinômios são utilizados para construir Q. O algoritmo é dado por,

I - Computa-se a tabela de diferenças divididas de f, utilizando as Eqs.(5.138) e (5.139).

II - Se

$$a_{j+1/2} \geq 0 \Rightarrow k_{\min}^1 = j \quad (5.141)$$

$$a_{j+1/2} \leq 0 \Rightarrow k_{\min}^1 = j + 1 \quad (5.142)$$

onde,

a - é a velocidade de Roe, definida na Eq.(5.121).

III - Defini-se,

$$Q^{(1)}(x) = f\left(S_{k_{\min}^1}\right) \quad (5.143)$$

IV - Para encontrar Q de ordem mais alta do que 1, defini-se a^l e b^l segundo as Eqs.(5.123) e (5.124) e c^l e k^l segundo as Eqs.(5.125) e (5.126).

V - Por último defini-se $Q^{(l)}(x)$ por,

$$Q^{(l)}(x) = Q^{(l-1)}(x) + c^l * \prod_{k=k_{\min}^{l-1}}^{k_{\min}^{l-1}+l-1} \left(dist_{j+1/2 \rightarrow \text{face oeste de } k} \right) \quad (5.144)$$

onde,

$$dist_{j+1/2 \rightarrow \text{face oeste de } k} = \text{sgn} * \sum_{i=P}^k \left(\sqrt{g_{11}} \right)_i \quad \text{para } k \neq j+1 \quad (5.145)$$

$$e$$

$$dist_{j+1/2 \rightarrow \text{face oeste de } k} = 1 \quad \text{para } k = j+1$$

$$\text{sgn} = \begin{cases} + & \text{se } k \leq j \\ - & \text{se } k > j+1 \end{cases} \quad (5.146)$$

5.4.4 Aplicação do esquema ENO de Shu e Osher nas equações do petróleo

Neste trabalho aplica-se o esquema ENO de Shu e Osher nas mobilidades das equações de governo do petróleo, para um sistema coordenado generalizado. Utilizou-se também o conceito de Khosla e Rubin, ou seja, os termos corretivos do esquema ENO atrasados no

tempo ou na iteração. Conseqüentemente, as derivadas das mobilidades serão idênticas as apresentadas pelo esquema UDS.

A metodologia empregada segue o que foi descrito na seção 5.4.3, com a troca do escalar f pelas mobilidades das fases.

Tomando novamente como exemplo a equação residual do componente água, ver Eq.(4.14). As avaliações são realizadas da seguinte forma:

- Face leste (*east*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_e < 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = Q^3(x_e) \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_P} = \frac{\partial \lambda_P^w}{\partial Y_P} \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = 0 \end{cases} \quad (5.147)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_e > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_e^w = Q^3(x_e) \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_P} = 0 \\ \frac{\partial \lambda_e^w}{\partial Y_E} = \frac{\partial \lambda_E^w}{\partial Y_E} \end{cases} \quad (5.148)$$

onde,

$Q^3(x_e)$ - representa o polinômio interpolador dado pela Eq.(5.144).

As avaliações relativas à mobilidade para as outras faces da equação da água e para o componente óleo e gás seguem o mesmo procedimento.

6 Esquemas 2D para Discretização do Termo Convectivo em Leis de Conservação

Neste capítulo apresenta-se o esquema *Multidimensional Upwind* de Van Ransbeeck e Hirsch (1993) que é genuinamente bidimensional. Mostra-se primeiramente a aplicação deste esquema para uma equação escalar convectiva, e depois, sua adaptação às equações do petróleo.

6.1 Esquema MUDS (*Multidimensional Upwind*)

Os métodos clássicos de solução de leis de conservação hiperbólicas são derivados de problemas unidimensionais, como pode ser visto no Capítulo 5. Estes são aplicados para problemas bidimensionais ou tridimensionais através da utilização de esquemas unidimensionais em cada direção. A partir do final da década de 80, alguns métodos multidimensionais começaram a surgir com o intuito de resolver as equações de Euler/Navier-Stokes levando em conta a propagação multidimensional de ondas e choques. Entre estes pode-se citar Hirsch e Lacor (1989), Lacor e Hirsch (1992), que desenvolveram um esquema bidimensional galgado na extrapolação MUSCL ao longo das características. Este método mostrou-se menos robusto que o *upwind* clássico, e, por conta disto, buscou-se uma forma alternativa com melhores propriedades de convergência. Com este objetivo, Hirsch e Van Ransbeeck (1992, 1994) e Van Ransbeeck e Hirsch (1993) desenvolveram os esquemas multidimensionais baseados na extrapolação dos fluxos, ao invés da extrapolação nas variáveis, e obtiveram boa robustez. O método apresentado neste capítulo é baseado nas idéias destes autores.

Considerando-se uma lei de conservação hiperbólica bidimensional, dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

ou, na forma não conservativa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6.2)$$

onde,

a, b - velocidades de convecção dadas pelas Eqs.(6.3) e (6.4), respectivamente.

$$a = \frac{\partial f}{\partial u} \quad (6.3)$$

$$b = \frac{\partial g}{\partial u} \quad (6.4)$$

Através do método dos volumes finitos, aplicado apenas no espaço, ou seja, formulação semi-discreta, e considerando-se uma discretização igualmente espaçada, a Eq.(6.1) é discretizada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f_e - f_w}{\Delta x} + \frac{g_n - g_s}{\Delta y} = 0 \quad (6.5)$$

onde, por exemplo, o fluxo numérico na face leste é dado por,

$$f_e = \frac{1}{2}(f_P + f_E) - d_e \quad (6.6)$$

onde,

d_e - dissipação numérica na face leste.

Para o caso linear, ou seja, quando as velocidades a e b não dependem de u , a forma apresentada na Eq.(6.2) é também a forma conservativa da lei de conservação hiperbólica, e pode ser discretizada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + b \frac{u_n - u_s}{\Delta y} = 0 \quad (6.7)$$

onde, avalia-se u da mesma forma que os fluxos, ou seja,

$$u_e = \frac{1}{2}(u_P + u_E) - \frac{d_e}{a} \quad (6.8)$$

Observa-se que diferentemente dos métodos apresentados no Capítulo 5, a avaliação do fluxo é dada por uma diferença central somada a um termo de dissipação, enquanto, que aqueles eram definidos por um termo UDS acrescentado de um ou mais termos corretivos.

A partir da definição do termo de dissipação, na Eq. (6.6), obtém-se uma grande variedade de esquemas. Por exemplo, recupera-se o esquema UDS definido-se o termo dissipativo por,

$$d_e = \frac{1}{2}|a|_e * (u_E - u_P) \quad (6.9)$$

onde,

a_e - velocidade convectiva na face leste, que pode ser obtida através da linearização de Roe, ver Eq.(6.10).

$$a_e = \frac{f_E - f_P}{u_E - u_P} \quad (6.10)$$

Nota-se que o termo dissipativo definido na Eq.(6.9) envolve apenas diferenças, da variável conservada, numa mesma linha coordenada, e portanto, este é unidimensional. Em contraste, os esquemas multidimensionais são constituídos por termos dissipativos que envolvem variações da solução em diferentes direções da malha. O domínio de dependência

destes métodos, ou seja, os volumes utilizados nas interpolações, dependem da direção da velocidade advectiva total e são tomados na direção a montante a esta.

Para facilitar o entendimento dos esquemas que serão apresentados acrescentou-se mais algumas características à notação já utilizada. Como pode ser visto na fig 6.1, adicionou-se denominações às interfaces cruzadas, localizados nas circunferências vazias, cujos nomes são formados pela soma das iniciais dos vizinhos diretos.

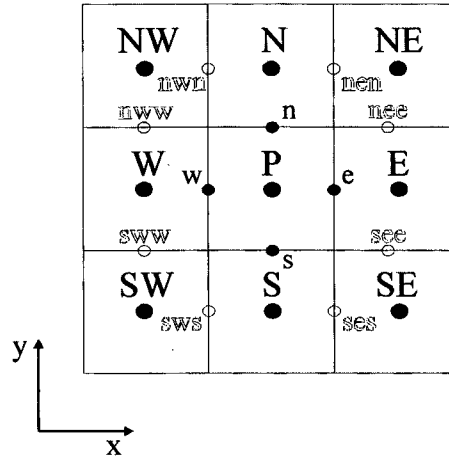


Figura 6.1 – Plano bidimensional utilizado para os esquemas MUDS

6.1.1 Esquema MUDS de 1ª Ordem

Define-se nesta seção um termo dissipativo bidimensional resultando em um esquema MUDS. Neste caso, em particular, este termo é de primeira ordem.

Considerando-se a aplicação do esquema na lei de conservação hiperbólica, Eq.(6.1), tem-se as seguintes avaliações para face leste e norte.

- Face leste (*east*)

Para o caso linear, defini-se o seguinte termo dissipativo:

$$d_e = \frac{1}{2} |a|_e * (u_E - u_P) + \frac{1}{2} \alpha' a^+ \left(\frac{b^+}{b} (u_P - u_S) - \frac{b^-}{b} (u_N - u_P) \right) + \frac{1}{2} \alpha' a^- \left(\frac{b^+}{b} (u_E - u_{SE}) - \frac{b^-}{b} (u_{NE} - u_E) \right) \quad (6.11)$$

onde, os termos com sinais superescritos são exclusivos, ou seja, utiliza-se apenas um dos quatro termos dependendo da direção das velocidades. Aplicando-se esta dissipação à Eq.(6.8), obtém-se:

$$u_e = u_P - \frac{1}{2} \left[\alpha' (u_P - u_S) \right] \text{ para } a \text{ e } b \geq 0 \quad (6.12)$$

$$u_e = u_p - \frac{1}{2} [\alpha' (u_N - u_p)] \text{ para } a \geq 0 \text{ e } b < 0 \quad (6.13)$$

$$u_e = u_E + \frac{1}{2} [\alpha' (u_E - u_{SE})] \text{ para } a < 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (6.14)$$

$$u_e = u_E + \frac{1}{2} [\alpha' (u_{NE} - u_E)] \text{ para } a \text{ e } b < 0 \quad (6.15)$$

onde,

$$\alpha' = \min \left(1, \left| \frac{b}{a} \right| \right) \quad (6.16)$$

A Fig. 6.2 facilita o entendimento dos volumes dependentes de acordo com a direção da velocidade.

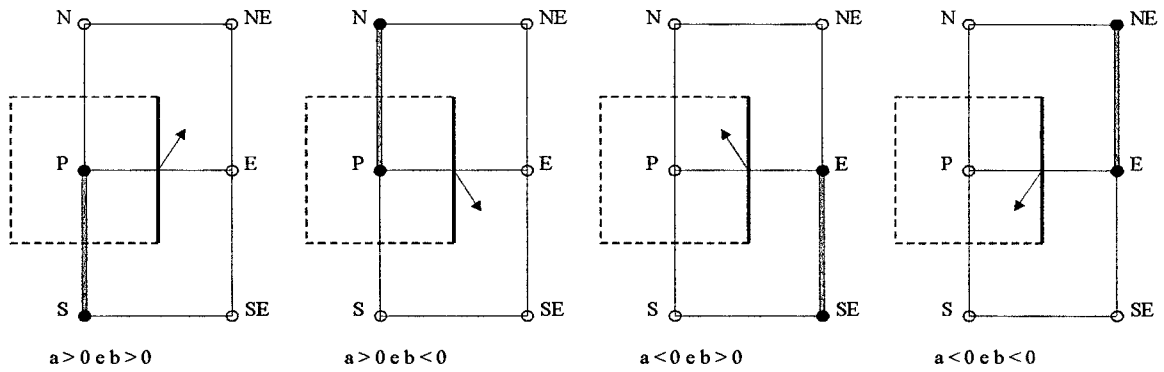


Figura 6.2 – Domínio de interpolação do esquema MUDS de 1ª ordem para face leste

Para o caso não linear, define-se o seguinte termo dissipativo:

$$d_e = \frac{1}{2} |a|_e * (u_E - u_p) + \frac{1}{2} \frac{a_e^+}{a_e} [\alpha_s b_s^+ (u_p - u_s) + \alpha_n b_n^- (u_N - u_p)] - \frac{1}{2} \frac{a_e^-}{a_e} [\alpha_{se} b_{se}^+ (u_E - u_{SE}) - \alpha_{ne} b_{ne}^- (u_{NE} - u_E)] \quad (6.17)$$

Aplicando-se este termo para Eq.(6.6), obtém-se:

$$f_e = a_e u_p - \frac{1}{2} [\alpha_s * b_s (u_p - u_s)] \text{ para } a_e \text{ e } b_e \geq 0 \quad (6.18)$$

$$f_e = a_e u_p - \frac{1}{2} [\alpha_n * b_n (u_N - u_p)] \text{ para } a_e \geq 0 \text{ e } b_e < 0 \quad (6.19)$$

$$f_e = a_e u_E + \frac{1}{2} [\alpha_{see} * b_{see} (u_E - u_{SE})] \text{ para } a_e < 0 \text{ e } b_e \geq 0 \quad (6.20)$$

$$f_e = a_e u_E + \frac{1}{2} [\alpha_{nee} * b_{nee} (u_{NE} - u_E)] \text{ para } a_e \text{ e } b_e < 0 \quad (6.21)$$

onde,

$$\alpha_s = \min \left(1, \left| \frac{a_e}{b_s} \right| \right) \quad (6.22)$$

$$\alpha_n = \min \left(1, \left| \frac{a_e}{b_n} \right| \right) \quad (6.23)$$

$$\alpha_{see} = \min \left(1, \left| \frac{a_e}{b_{see}} \right| \right) \quad (6.24)$$

$$\alpha_{nee} = \min \left(1, \left| \frac{a_e}{b_{nee}} \right| \right) \quad (6.25)$$

As velocidades a e b são dadas pela aproximação de Roe, análogas à Eq.(6.10).

- Face norte (*north*)

Para o caso linear, Eq.(6.7), tem-se:

$$u_n = u_P - \frac{1}{2} [\delta * (u_P - u_W)] \text{ para } a \text{ e } b \geq 0 \quad (6.26)$$

$$u_n = u_N + \frac{1}{2} [\delta * (u_N - u_{NW})] \text{ para } a \geq 0 \text{ e } b < 0 \quad (6.27)$$

$$u_n = u_P - \frac{1}{2} [\delta * (u_E - u_P)] \text{ para } a < 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (6.28)$$

$$u_n = u_N + \frac{1}{2} [\delta * (u_{NE} - u_N)] \text{ para } a \text{ e } b < 0 \quad (6.29)$$

onde,

$$\delta = \min \left(1, \left| \frac{b}{a} \right| \right) \quad (6.30)$$

A Fig. 6.3 facilita o entendimento dos volumes dependentes de acordo com a direção da velocidade.

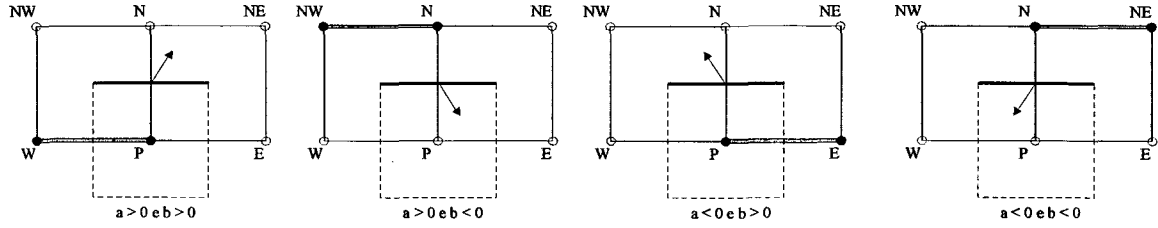


Figura 6.3 – Domínio de interpolação do esquema MUDS de 1ª ordem para face norte

Para o caso não linear, Eq.(6.5), tem-se:

$$g_n = b_n u_P - \frac{1}{2} [\delta_w * a_w (u_P - u_W)] \text{ para } a_n \text{ e } b_n \geq 0 \quad (6.31)$$

$$g_n = b_n u_N + \frac{1}{2} [\delta_{wn} * a_{wn} (u_N - u_{NW})] \text{ para } a_n \geq 0 \text{ e } b_n < 0 \quad (6.32)$$

$$g_n = b_n u_P - \frac{1}{2} [\delta_e * a_e (u_E - u_P)] \text{ para } a_n < 0 \text{ e } b_n \geq 0 \quad (6.33)$$

$$g_n = b_n u_N - \frac{1}{2} [\delta_{nen} * a_{nen} (u_{NE} - u_N)] \text{ para } a_n \text{ e } b_n < 0 \quad (6.34)$$

onde,

$$\delta_w = \min \left(1, \left| \frac{b_n}{a_w} \right| \right) \quad (6.35)$$

$$\delta_e = \min \left(1, \left| \frac{b_n}{a_e} \right| \right) \quad (6.36)$$

$$\delta_{wn} = \min \left(1, \left| \frac{b_n}{a_{wn}} \right| \right) \quad (6.37)$$

$$\delta_{nen} = \min \left(1, \left| \frac{b_n}{a_{nen}} \right| \right) \quad (6.38)$$

As velocidades a e b são dadas pela aproximação de Roe, análogas a Eq.(6.10).

As avaliações nas faces oeste e sul, deste esquema, obtém-se facilmente a partir das interpolações apresentadas.

6.1.2 Esquema MUDS de 2ª Ordem LED (*Local Extremum Diminishing*)

A idéia consiste em utilizar um termo dissipativo bidimensional de segunda ordem limitado, resultando em um esquema MUDS monotônico.

O conceito de limitadores de fluxo multidimensionais foi introduzido por Sidilkover (1989). Basicamente, consiste em fazer uso dos gradientes de fluxo em duas direções da malha, com isto, o limitador de fluxo passa a depender do sinal de ambas as componentes de velocidade.

Considerando-se a aplicação do esquema na lei de conservação hiperbólica, Eq.(6.1), tem-se as seguintes avaliações para face leste e norte.

- Face leste (*east*)

Para o caso linear, Eq.(6.7), tem-se:

$$u_e = u_P + \frac{1}{2}(u_{SE} - u_S) * \Psi(r_e^{++}) \text{ para } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (6.39)$$

$$u_e = u_P + \frac{1}{2}(u_{NE} - u_N) * \Psi(r_e^{+-}) \text{ para } a \geq 0 \text{ e } b < 0 \quad (6.40)$$

$$u_e = u_P - \frac{1}{2}(u_{SE} - u_S) * \Psi(r_e^{-+}) \text{ para } a < 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (6.41)$$

$$u_e = u_P - \frac{1}{2}(u_{NE} - u_N) * \Psi(r_e^{--}) \text{ para } a < 0 \text{ e } b < 0 \quad (6.42)$$

onde,

$$r_e^{++} = -\frac{b(u_P - u_S)}{a(u_{SE} - u_S)} \quad (6.43)$$

$$r_e^{+-} = -\frac{b(u_N - u_P)}{a(u_{NE} - u_N)} \quad (6.44)$$

$$r_e^{-+} = -\frac{b(u_E - u_{SE})}{a(u_{SE} - u_S)} \quad (6.45)$$

$$r_e^{--} = -\frac{b(u_{NE} - u_E)}{a(u_{NE} - u_N)} \quad (6.46)$$

Observe que os sinais superescritos em r indicam a direção das velocidades a e b , nesta ordem.

A Fig. 6.4 facilita o entendimento dos volumes dependentes de acordo com a direção da velocidade.

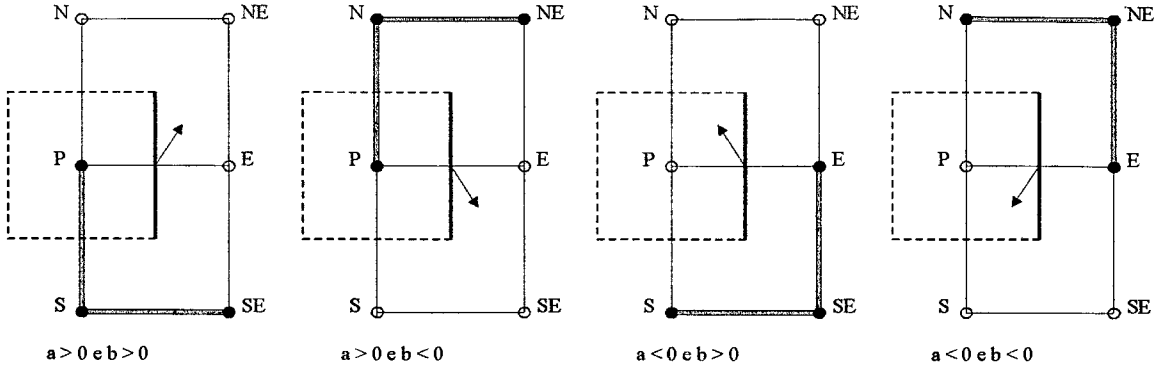


Figura 6.4 - Domínio de interpolação do esquema MUDS de 2ª ordem LED para face leste

Para o caso não linear, Eq.(6.5), tem-se:

$$f_e = a_e u_P + \frac{1}{2} [a_{ses} (u_{SE} - u_S)] * \Psi(r_e^{++}) \text{ para } a_e \text{ e } b_e \geq 0 \quad (6.47)$$

$$f_e = a_e u_P + \frac{1}{2} [a_{nen} (u_{NE} - u_N)] * \Psi(r_e^{+-}) \text{ para } a_e \geq 0 \text{ e } b_e < 0 \quad (6.48)$$

$$f_e = a_e u_E - \frac{1}{2} [a_{ses} (u_{SE} - u_S)] * \Psi(r_e^{-+}) \text{ para } a_e < 0 \text{ e } b_e \geq 0 \quad (6.49)$$

$$f_e = a_e u_E - \frac{1}{2} [a_{nen} (u_{NE} - u_N)] * \Psi(r_e^{--}) \text{ para } a_e \text{ e } b_e < 0 \quad (6.50)$$

onde,

$$r_e^{++} = - \frac{b_s (u_P - u_S)}{a_{ses} (u_{SE} - u_S)} \quad (6.51)$$

$$r_e^{+-} = - \frac{b_n (u_N - u_P)}{a_{nen} (u_{NE} - u_N)} \quad (6.52)$$

$$r_e^{-+} = - \frac{b_{see} (u_E - u_{SE})}{a_{ses} (u_{SE} - u_S)} \quad (6.53)$$

$$r_e^{--} = - \frac{b_{nee} (u_{NE} - u_E)}{a_{nen} (u_{NE} - u_N)} \quad (6.54)$$

As velocidades a e b são dadas pela aproximação de Roe, análogas a Eq.(6.10).

- Face norte (*north*)

Para o caso linear, Eq.(6.7), tem-se:

$$u_n = u_P + \frac{1}{2}(u_{NW} - u_W) * \Psi(r_n^{++}) \text{ para } a \text{ e } b \geq 0 \quad (6.55)$$

$$u_n = u_N - \frac{1}{2}(u_{NW} - u_W) * \Psi(r_n^{+-}) \text{ para } a \geq 0 \text{ e } b < 0 \quad (6.56)$$

$$u_n = u_P + \frac{1}{2}(u_{NE} - u_E) * \Psi(r_n^{-+}) \text{ para } a < 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (6.57)$$

$$u_n = u_N - \frac{1}{2}(u_{NE} - u_E) * \Psi(r_n^{--}) \text{ para } a \text{ e } b < 0 \quad (6.58)$$

onde,

$$r_n^{++} = -\frac{a(u_P - u_W)}{b(u_{NW} - u_W)} \quad (6.59)$$

$$r_n^{+-} = -\frac{a(u_N - u_{NW})}{b(u_{NW} - u_W)} \quad (6.60)$$

$$r_n^{-+} = -\frac{a(u_E - u_P)}{b(u_{NE} - u_E)} \quad (6.61)$$

$$r_n^{--} = -\frac{a(u_{NE} - u_N)}{b(u_{NE} - u_E)} \quad (6.62)$$

A Fig. 6.5 facilita o entendimento dos volumes dependentes de acordo com a direção da velocidade.

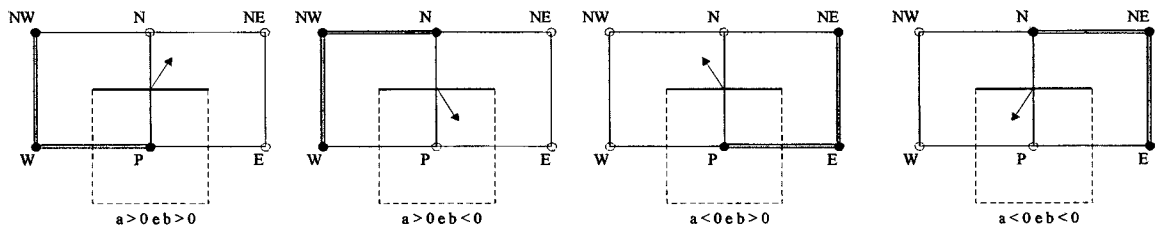


Figura 6.5 - Domínio de interpolação do esquema MUDS de 2ª ordem LED para face norte

Para o caso não linear, Eq.(6.5), tem-se:

$$g_n = b_n u_P + \frac{1}{2}[b_{mww}(u_{NW} - u_W)] * \Psi(r_n^{++}) \text{ para } a \text{ e } b \geq 0 \quad (6.63)$$

$$g_n = b_n u_N - \frac{1}{2} [b_{nw} (u_{NW} - u_W)] * \Psi(r_n^{+-}) \text{ para } a \geq 0 \text{ e } b < 0 \quad (6.64)$$

$$g_n = b_n u_P + \frac{1}{2} [b_{ne} (u_{NE} - u_E)] * \Psi(r_n^{-+}) \text{ para } a < 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (6.65)$$

$$g_n = b_n u_N - \frac{1}{2} [b_{ne} (u_{NE} - u_E)] * \Psi(r_n^{-}) \text{ para } a \text{ e } b < 0 \quad (6.66)$$

onde,

$$r_n^{++} = - \frac{a_w (u_P - u_W)}{b_{nw} (u_{NW} - u_W)} \quad (6.67)$$

$$r_n^{+-} = - \frac{a_{nw} (u_N - u_{NW})}{b_{nw} (u_{NW} - u_W)} \quad (6.68)$$

$$r_n^{-+} = - \frac{a_e (u_E - u_P)}{b_{ne} (u_{NE} - u_E)} \quad (6.69)$$

$$r_n^{-} = - \frac{a_{ne} (u_{NE} - u_N)}{b_{ne} (u_{NE} - u_E)} \quad (6.70)$$

As velocidades a e b são dadas pela aproximação de Roe, análogas a Eq.(6.10).

As avaliações nas faces oeste e sul, deste esquema, obtêm-se facilmente a partir das interpolações apresentadas.

6.1.3 Aplicação dos esquemas MUDS nas equações do petróleo

Neste trabalho aplica-se os esquemas MUDS de primeira ordem e MUDS de segunda ordem LED nas equações governantes do petróleo para o sistema cartesiano com discretização igualmente espaçada. A extensão para o sistema coordenado generalizado não é realizada devido aos maus resultados apresentados no Capítulo 8. Como entende-se que características obtidas por um esquema em um certo sistema coordenado são também obtidas quando se transforma o sistema, não havia motivo para esforçar-se na transformação dos esquemas multidimensionais para o sistema generalizado.

Comparando-se a equação de conservação da massa do componente água, ver Eq.(3.14), com a Eq.(6.1), define-se os fluxos numéricos f e g da seguinte maneira:

$$f^w = \lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \quad (6.71)$$

$$g^w = \lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y} \quad (6.72)$$

Por sua vez, as velocidades advectivas, ver Eqs.(6.3) e (6.4), são definidas por,

$$a^w = \frac{\partial}{\partial Z^w} \left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right) \quad (6.73)$$

$$b^w = \frac{\partial}{\partial Z^w} \left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y} \right) \quad (6.74)$$

Expandindo-se a Eq.(6.73) pela regra da cadeia obtém-se,

$$a^w = \frac{\partial \lambda^w}{\partial Z^w} \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} + \lambda^w \frac{\partial}{\partial Z^w} \left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right) \quad (6.75)$$

Como mostra-se na seção 8.2.1.1, o problema bidimensional de geometria *five-spot* utilizado para testar várias esquemas no sistema cartesiano, apresenta as seguintes características: bifásico, sem pressão capilar, permeabilidade absoluta constante, densidade da água e do óleo constantes e iguais, viscosidade da água constante e permeabilidade relativa da cada componente igual a saturação do respectivo componente. E já que este é o caso utilizado para testar os esquemas MUDS, pode-se simplificar bastante a Eq.(6.75). Como pode-se verificar pela Eq.(3.21) e apêndice A, a derivada do segundo termo da Eq.(6.75) tem valor zero para problemas bifásicos sem pressão capilar. Consequentemente, a Eq.(6.75) fica da seguinte forma:

$$a^w = \frac{\partial \lambda^w}{\partial Z^w} \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \quad (6.76)$$

Além disto, para o caso rodado, a derivada da mobilidade em relação a fração mássica tem valor constante e é dado por,

$$\frac{\partial \lambda^w}{\partial Z^w} = \frac{K\rho^w}{\mu^w} \quad (6.77)$$

e portanto, a velocidade advectiva para o componente água resulta em,

$$a^w = \frac{K\rho^w}{\mu^w} \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \quad (6.78)$$

Aplicando esta formulação para o termo dissipativo unidimensional, Eq.(6.9), obtém-se,

$$d_e^w = \frac{1}{2} \left| \frac{K\rho^w}{\mu^w} \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right|_e (Z_E^w - Z_P^w) \quad (6.79)$$

e como, parte do termo em módulo é constante e sempre positivo, tem-se,

$$d_e^w = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right|_e \frac{K\rho^w}{\mu^w} (Z_E^w - Z_P^w) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right|_e (\lambda_E^w - \lambda_P^w) \quad (6.80)$$

É importante ressaltar que a segunda igualdade na equação anterior só é válido para o problema *five-spot* utilizado.

Logo, a aplicação dos esquemas MUDS nas equações do petróleo é dada com base nos esquemas apresentados nas seções 6.1.1 e 6.1.2 para o caso não linear, com as seguintes substituições:

$$a^w = \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \quad (6.81)$$

$$b^w = \frac{\partial \Phi^w}{\partial y} \quad (6.82)$$

$$u = \lambda \quad (6.83)$$

7 Esquema Nove-Pontos para Discretização das Equações Governantes do Petróleo

Neste capítulo propõe-se um esquema nove-pontos para discretização das equações governantes do petróleo, num sistema generalizado, baseado na técnica originalmente idealizada por Yanosik e McCracken (1976). Propõe-se também a utilização de um esquema de nove-pontos de alta resolução, galgado na metodologia desenvolvida por Wolcott *et al.* (1996), que consiste originalmente na utilização da formulação nove-pontos com o esquema TVD de 3ª ordem.

É importante destacar que este esquema apresenta um *stencil* de nove pontos mesmo para uma malha cartesiana, ou seja, utiliza as pressões dos vizinhos diretos e cruzados do volume P. Diferentemente, a metodologia apresentada no Capítulo 5 utiliza as pressões apenas dos vizinhos diretos se a malha for ortogonal.

Daqui em diante, chamar-se a formulação exposta no Capítulo 5 de cinco-pontos.

7.1 Motivação para Utilização do Esquema Nove-Pontos

Preocupados com o problema de orientação de malha, Yanosik e McCracken (1976) examinaram os resultados apresentados pela formulação cinco-pontos, com mobilidade aproximada por UDS, para um problema com deslocamento tipo pistão com razão de mobilidade desfavorável e de geometria *five-spot*. Utilizou-se uma malha diagonal de 21x21 volumes e uma paralela de 29x29 volumes. A fig 7.1 mostra a frente de deslocamento simulada para malha paralela, quadrado maior, e para malha diagonal, quadrado menor rotacionado. Lembrando-se que o problema é o mesmo para ambas as malhas, sobrepõe-se os *grids* para efetuar uma comparação direta entre as frentes calculadas. Como indicado na figura, a frente de saturação se desloca preferencialmente ao longo das fronteiras da malha, e como consequência, a frente de deslocamento simulada difere para cada tipo de malha e, além disso, é côncava em relação ao poço de injeção. Os autores concluem que uma provável causa para este erro é a não contabilização do fluxo entre o volume que contém o poço e seus vizinhos na diagonal. Com o intuito de minimizar este erro propõem o esquema nove-pontos.

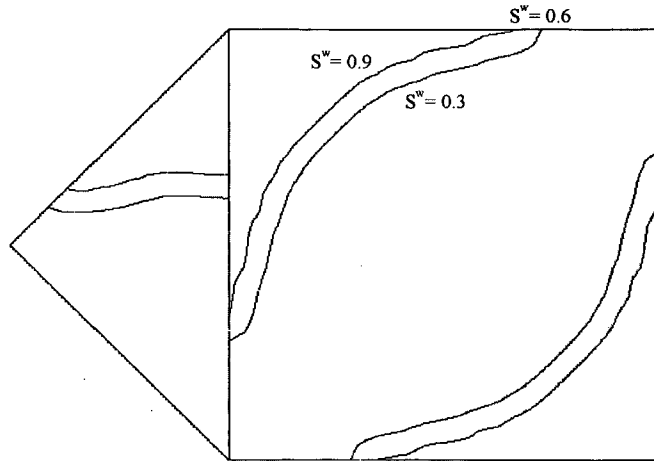


Figura 7.1 – Frentes calculadas para a malha diagonal e paralela com PVI igual a 0.3. Razão de mobilidade igual a 10 ($M = 10$)

7.2 Esquema Nove-Pontos de Baixa Ordem

Neste esquema as mobilidades são avaliadas pelo função de interpolação UDS.

7.2.1 Implementação no Sistema Cartesiano

A idéia principal na construção do esquema nove-pontos consiste na combinação das equações de balanço, com formulação cinco-pontos, para a malha diagonal e paralela, ver Fig. 1.2.

Com base na sobreposição da malha paralela sobre a diagonal Yanosik e McCracken obtiveram dois volumes de controle para realizar os balanços de massa, ver Fig. 7.2. O volume advindo da malha paralela inscreve o volume da malha diagonal e possui o dobro da área. É importante destacar que embora esteja-se aludindo a volumes de controle, para explicar a formulação nove-pontos, esta foi idealizada em diferenças divididas.

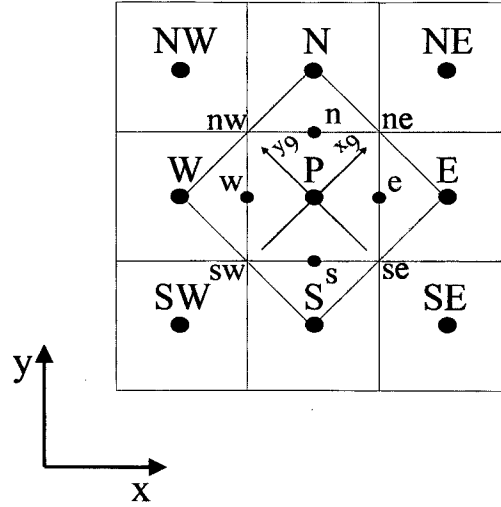


Figura 7.2 – Representação dos volumes envolvidos no esquema nove-pontos

As Eqs.(7.1) e (7.2) representam a equação de conservação da massa do componente água na direção x, y e x_9, y_9 , respectivamente.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y} \right] - m^w \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho^m Z^w] = \frac{\partial}{\partial x_9} \left[\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x_9} \right] + \frac{\partial}{\partial y_9} \left[\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y_9} \right] - m^w \quad (7.2)$$

Integrando as Eqs.(7.1) e (7.2) no tempo e no espaço, tem-se respectivamente

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^0 \right] + m^w \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \Delta t \Delta y \Delta z \left[\left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right)_e - \left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x} \right)_w \right] + \Delta t \Delta x \Delta z \left[\left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y} \right)_n - \left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y} \right)_s \right] \quad (7.3)$$

$$\Delta x_9 \Delta y_9 \Delta z \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^0 \right] + 2 m^w \Delta x_9 \Delta y_9 \Delta z \Delta t = \Delta t \Delta y_9 \Delta z \left[\left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x_9} \right)_{ne} - \left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial x_9} \right)_{sw} \right] + \Delta t \Delta x_9 \Delta z \left[\left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y_9} \right)_{nw} - \left(\lambda^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial y_9} \right)_{se} \right] \quad (7.4)$$

Sabendo que,

$$\Delta x_9 \Delta y_9 = 2 \Delta x \Delta y \quad (7.5)$$

e considerando uma discretização igualmente espaçada com Δx igual a Δy e multiplicando a Eq.(7.3) por 4, adicionando a mesma a Eq.(7.4) e dividindo a equação resultante por 6 e Δt , obtém-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \left[(\phi \rho^m Z^w) - (\phi \rho^m Z^w)^0 \right]_P + m^w \Delta x \Delta y \Delta z = \\
& \frac{2}{3} \Delta z \left[\lambda_e^w (\Phi_E^w - \Phi_P^w) - \lambda_w^w (\Phi_P^w - \Phi_W^w) + \lambda_n^w (\Phi_N^w - \Phi_P^w) - \lambda_s^w (\Phi_P^w - \Phi_S^w) \right] + \\
& \frac{1}{6} \Delta z \left[\lambda_{ne}^w (\Phi_{NE}^w - \Phi_P^w) - \lambda_{sw}^w (\Phi_P^w - \Phi_{SW}^w) + \lambda_{nw}^w (\Phi_{NW}^w - \Phi_P^w) - \lambda_{se}^w (\Phi_P^w - \Phi_{SE}^w) \right]
\end{aligned} \quad (7.6)$$

A Eq.(7.16) é a formulação sugerida por Yanosik e McCracken (1976) e, como pode-se observar, resulta em uma redução dos fluxos diretos em 2/3 com o restante contido nos fluxos cruzados. Esta formulação é aplicada da mesma forma aos outros componentes.

7.2.2 Transformação para Coordenadas Curvilíneas

A proposta de transformação do esquema nove-pontos para coordenadas generalizadas segue uma idéia bastante simples. A partir dos centros dos volumes vizinhos diretos de P, leste (E), oeste (W), norte (N) e sul (S) cria-se um segundo volume de controle, ver Fig. 7.3, onde realiza-se um novo balanço. Então é realizada uma combinação linear, nos moldes da seção 7.2.1, entre o balanço no volume de controle de malha e o novo volume gerado.

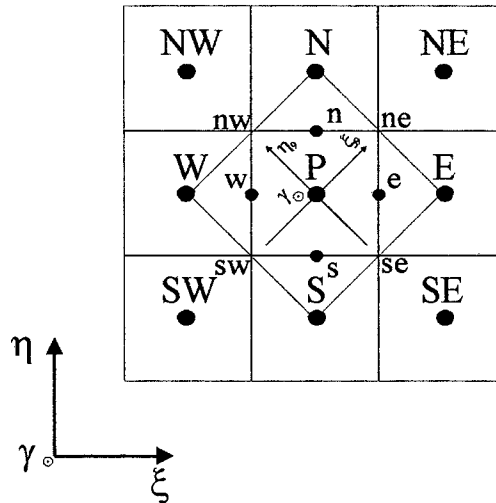


Figura 7.3 – Representação dos volumes envolvidos no esquema nove-pontos generalizado. Plano computacional

Pare facilitar a explanação repete-se aqui a Eq.(4.3), ou seja, equação da conservação de massa do componente água no sistema curvilíneo.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m Z^w) + \frac{m^w}{J} = \\
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \eta} \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Escrevendo-se a equação balanço análoga para o sistema $\xi_9 \eta_9$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J_9} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho^m Z^w) + \frac{m^w}{J_9} = \\
& \frac{\partial}{\partial \xi_9} \left[D_{11_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{12_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{13_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \eta_9} \left[D_{21_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{22_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{23_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[D_{31_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{32_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{33_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]
\end{aligned} \tag{7.8}$$

onde,

$$D_{ij_9}^p = \frac{\lambda^p}{J_9} \left[\frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial x^j}{\partial x} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \frac{\partial x^j}{\partial y} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial x^j}{\partial z} \right] \tag{7.9}$$

com $i, j = 1, 2$ ou 3 e x^1, x^2 e x^3 são respectivamente, ξ_9, η_9 e γ . Portanto, para exemplificar, $D_{12_9}^w$ é

$$D_{12_9}^w = \frac{\lambda^w}{J_9} \left[\frac{\partial \xi_9}{\partial x} \frac{\partial \eta_9}{\partial x} + \frac{\partial \xi_9}{\partial y} \frac{\partial \eta_9}{\partial y} + \frac{\partial \xi_9}{\partial z} \frac{\partial \eta_9}{\partial z} \right] \tag{7.10}$$

Integrando-se as Eqs.(7.7) e (7.8) nos respectivos volumes, obtém-se respectivamente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] \Delta V + \frac{m^w}{J} \Delta V \Delta t = \\
& \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{e} \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t - \\
& \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{w} \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t + \\
& \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{n} \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t - \\
& \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{s} \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t + \\
& \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{t} \Delta \xi \Delta \eta \Delta t - \\
& \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{b} \Delta \xi \Delta \eta \Delta t
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J_9} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] \Delta V_9 + \frac{m^w}{J_9} \Delta V_9 \Delta t = \\
& \left[D_{11_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{12_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{13_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{ne} \Delta \eta_9 \Delta \gamma \Delta t - \\
& \left[D_{11_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{12_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{13_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{sw} \Delta \eta_9 \Delta \gamma \Delta t + \\
& \left[D_{21_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{22_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{23_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{nw} \Delta \xi_9 \Delta \gamma \Delta t - \\
& \left[D_{21_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{22_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{23_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{se} \Delta \xi_9 \Delta \gamma \Delta t + \\
& \left[D_{31_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{32_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{33_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{t} \Delta \xi_9 \Delta \eta_9 \Delta t - \\
& \left[D_{31_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{32_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{33_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{b} \Delta \xi_9 \Delta \eta_9 \Delta t
\end{aligned} \tag{7.12}$$

A combinação linear das Eqs.(7.11) e (7.12) deve ser realizada com base numa área selecionada. Optando-se pela área representada pelo inverso do jacobiano resulta na seguinte combinação linear geral:

$$\alpha * \text{Eq.}(7.11) + (1-\alpha) * (J_9/J) * \text{Eq.}(7.12) \tag{7.13}$$

Nota-se que com esta combinação linear o termo transiente é avaliado na área base, pois

$$\alpha \frac{1}{J} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] + (1-\alpha) \frac{J_9}{J} \frac{1}{J_9} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] = \frac{1}{J} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] \quad (7.14)$$

com,

$$\Delta V = \Delta \xi \Delta \eta \Delta \gamma = \Delta V_9 = \Delta \xi_9 \Delta \eta_9 \Delta \gamma = 1 \quad (7.15)$$

Portanto, obtém-se a seguinte formulação nove-pontos, para α igual a 2/3:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \left[(\phi \rho^m Z^w)_p - (\phi \rho^m Z^w)_p^o \right] \Delta V + \frac{m^w}{J} \Delta V \Delta t = \\ & \frac{2}{3} \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_e \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t - \\ & \frac{2}{3} \left[D_{11}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{12}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{13}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_w \Delta \eta \Delta \gamma \Delta t + \\ & \frac{2}{3} \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_n \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t - \\ & \frac{2}{3} \left[D_{21}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{22}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{23}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_s \Delta \xi \Delta \gamma \Delta t + \\ & \frac{2}{3} \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_t \Delta \xi \Delta \eta \Delta t - \\ & \frac{2}{3} \left[D_{31}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi} + D_{32}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta} + D_{33}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_b \Delta \xi \Delta \eta \Delta t + \\ & \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{11_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{12_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{13_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{ne} \Delta \eta_9 \Delta \gamma \Delta t - \\ & \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{11_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{12_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{13_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{sw} \Delta \eta_9 \Delta \gamma \Delta t + \\ & \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{21_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{22_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{23_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{nw} \Delta \xi_9 \Delta \gamma \Delta t - \\ & \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{21_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{22_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{23_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{se} \Delta \xi_9 \Delta \gamma \Delta t + \\ & \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{31_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{32_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{33_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_t \Delta \xi_9 \Delta \eta_9 \Delta t - \\ & \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{31_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{32_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{33_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_b \Delta \xi_9 \Delta \eta_9 \Delta t \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde,

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_{ne} = \Phi_{NE}^w - \Phi_P^w \quad (7.17)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_{sw} = \Phi_P^w - \Phi_{SW}^w \quad (7.18)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_{nw} = \Phi_N^w - \Phi_W^w \quad (7.19)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_{se} = \Phi_E^w - \Phi_S^w \quad (7.20)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_t = \frac{1}{8} \left[\frac{\left(\Phi_{TNE}^w + \Phi_{TN}^w + \Phi_{TE}^w + \Phi_{NE}^w + \Phi_N^w + \Phi_E^w \right)}{\left(\Phi_{TSW}^w + \Phi_{TS}^w + \Phi_{TE}^w + \Phi_{SW}^w + \Phi_S^w + \Phi_W^w \right)} \right] \quad (7.21)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_b = \frac{1}{8} \left[\frac{\left(\Phi_{NE}^w + \Phi_N^w + \Phi_E^w + \Phi_{BE}^w + \Phi_{BN}^w + \Phi_{SE}^w \right)}{\left(\Phi_{SW}^w + \Phi_S^w + \Phi_E^w + \Phi_{BSW}^w + \Phi_{BS}^w + \Phi_{BW}^w \right)} \right] \quad (7.22)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_{ne} = \Phi_N^w - \Phi_E^w \quad (7.23)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_{sw} = \Phi_W^w - \Phi_S^w \quad (7.24)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_{nw} = \Phi_{NW}^w - \Phi_P^w \quad (7.25)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_{se} = \Phi_P^w - \Phi_{SE}^w \quad (7.26)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_t = \frac{1}{8} \left[\frac{\left(\Phi_{TNW}^w + \Phi_{TN}^w + \Phi_{TW}^w + \Phi_{NW}^w + \Phi_N^w + \Phi_W^w \right)}{\left(\Phi_{TSE}^w + \Phi_{TS}^w + \Phi_{TE}^w + \Phi_{SE}^w + \Phi_S^w + \Phi_P^w \right)} \right] \quad (7.27)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_b = \frac{1}{8} \left[\frac{\left(\Phi_{NW}^w + \Phi_N^w + \Phi_W^w + \Phi_{BNW}^w + \Phi_{BN}^w + \Phi_{BW}^w \right)}{\left(\Phi_{SE}^w + \Phi_S^w + \Phi_E^w + \Phi_{BSE}^w + \Phi_{BS}^w + \Phi_{PE}^w \right)} \right] \quad (7.28)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right)_{ne} = \frac{1}{8} \left[\left(\Phi_{TNE}^w + \Phi_{TN}^w + \Phi_{TE}^w + \Phi_T^w \right) - \left(\Phi_{BNE}^w + \Phi_{BN}^w + \Phi_{BE}^w + \Phi_B^w \right) \right] \quad (7.29)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right)_{sw} = \frac{1}{8} \left[\left(\Phi_{TSW}^w + \Phi_{TS}^w + \Phi_{TW}^w + \Phi_T^w \right) - \left(\Phi_{BSW}^w + \Phi_{BS}^w + \Phi_{BW}^w + \Phi_B^w \right) \right] \quad (7.30)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma}\right)_{nw} = \frac{1}{8} \left[(\Phi_{TNW}^w + \Phi_{TN}^w + \Phi_{TW}^w + \Phi_T^w) - (\Phi_{BNW}^w + \Phi_{BN}^w + \Phi_{BW}^w + \Phi_B^w) \right] \quad (7.31)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma}\right)_{se} = \frac{1}{8} \left[(\Phi_{TSE}^w + \Phi_{TS}^w + \Phi_{TE}^w + \Phi_T^w) - (\Phi_{BSE}^w + \Phi_{BS}^w + \Phi_{BE}^w + \Phi_B^w) \right] \quad (7.32)$$

Como pode ser visto nas Eqs.(7.17) a (7.32) não foi levado em conta a possibilidade de haver falhas geológicas no reservatório de petróleo. Devido a não coincidência física entre as falhas e a malha construída, para o esquema nove-pontos, o perfeito tratamento das falhas torna-se um trabalho complexo e arriscado, já que muitas aproximações deverão ser feitas.

Com intuito de facilitar a implementação utiliza-se neste trabalho os termos multiplicados por $(1-\alpha)$ atrasados na iteração ou no tempo. Afirmar-se que este procedimento não causa erros numéricos, exceto quando é aplicado no tempo como explanado na seção 5.2.2, mas pode prejudicar a convergência do método de Newton.

É importante destacar que o volume de controle gerado a partir dos vizinhos, para uma malha qualquer, não passa necessariamente pelos pontos ne, nw, se e sw, e portanto, há uma aproximação para malhas muito distorcidas.

7.2.3 Avaliação das Mobilidades para Nove-Pontos de Baixa Ordem

Utiliza-se o esquema UDS e a avaliação das mobilidades segue o procedimento explanado na seção 5.1.2. As aproximações apenas para os pontos cruzados do esquema nove-pontos aplicado na equação da água, Eq.(7.16), são:

- Face nordeste (*north-east*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}}\right)_{ne} < 0 \rightarrow \lambda_{ne}^w = \lambda_p^w \quad (7.33)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}}\right)_{ne} > 0 \rightarrow \lambda_{ne}^w = \lambda_{NE}^w \quad (7.34)$$

- Face sudoeste (*south-west*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}}\right)_{sw} < 0 \rightarrow \lambda_{sw}^w = \lambda_{SW}^w \quad (7.35)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}}\right)_{sw} > 0 \rightarrow \lambda_{sw}^w = \lambda_p^w \quad (7.36)$$

- Face noroeste (*north-west*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_{nw} < 0 \rightarrow \lambda_{nw}^w = \lambda_P^w \quad (7.37)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_{nw} > 0 \rightarrow \lambda_{nw}^w = \lambda_{NW}^w \quad (7.38)$$

- Face sudeste (*south-east*)

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_{se} < 0 \rightarrow \lambda_{se}^w = \lambda_{SE}^w \quad (7.39)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_{se} > 0 \rightarrow \lambda_{se}^w = \lambda_P^w \quad (7.40)$$

onde,

$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_f$ - derivada normal do potencial na face f, termos entre colchetes na Eq.(7.16).

As avaliações relativas à mobilidade para o componente óleo e gás seguem o mesmo procedimento.

7.2.4 Cuidados com a Condição de Neuman para o Esquema Nove-Pontos

Yanosik e McCracken (1976) obtiveram resultados não físicos para problemas com razão de mobilidade bastante desfavorável com deslocamento de frente do tipo pistão, ver Fig. 7.4.

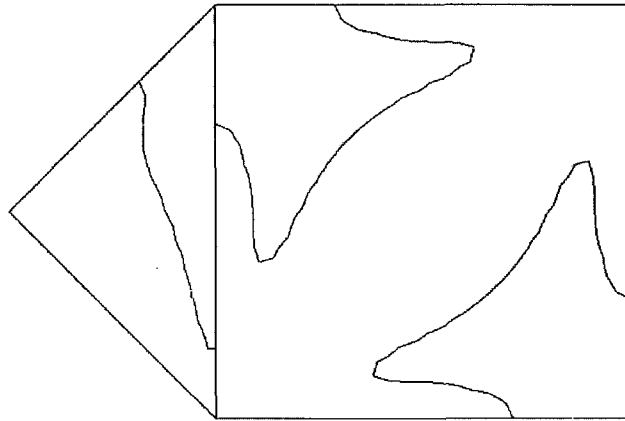


Figura 7.4 – Frente ($S^w = 0.9$) calculadas para a malha diagonal e paralela com PVI igual a 0.5. Razão de mobilidade igual a 25 ($M = 25$)

Vários autores, como por exemplo Ko e Au (1979), descreveram este erro e o atribuíram a uma deficiência da formulação de Yanosik e McCracken. Aqueles propuseram metodologias complexas para corrigi-los. Mais tarde Bajor e Cormack (1989a, 1989b) demonstraram, através de vários testes, que a principal deficiência decorria da incorreta implementação da condição de contorno de Neuman, fluxo prescrito nulo, no esquema nove-pontos.

Bajor e Cormack propuseram um novo problema para o estudo do efeito de orientação de malha. Este era composto por um poço injetor circundado por poços produtores, ver Fig. 7.5. Com esta configuração o problema tem solução analítica, e portanto, apresenta melhores condições para análises.

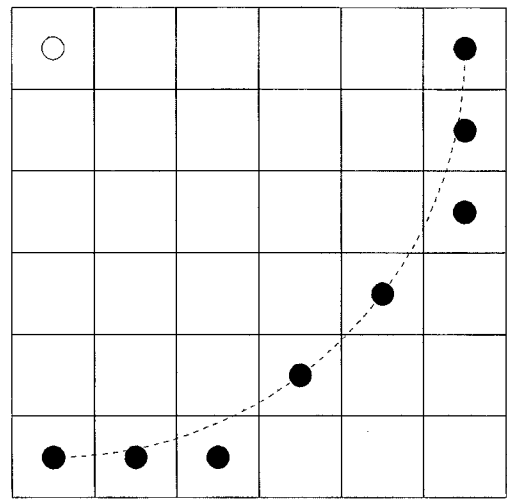


Figura 7.5 – ¼ da geometria proposta por Bajor e Cormack (1989a, 1989b), onde os poços produtores estão representados por círculos cheios. Neste caso o problema está discretizado numa malha 6x6.

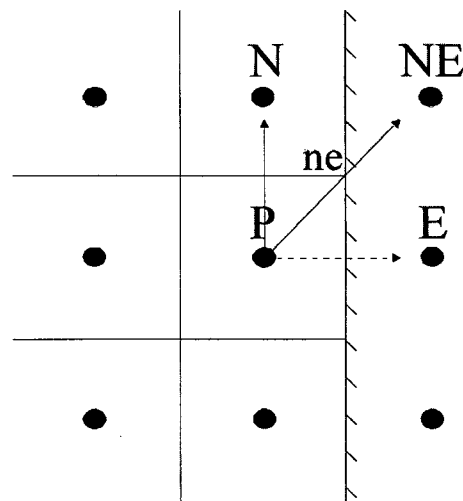


Figura 7.6 – Representação esquemática do fluxo cruzado na fronteira do domínio

Nesta configuração os autores mostram duas maneiras de tratar a condição de contorno. Primeiramente, da maneira até então utilizada que era zerar a mobilidade dos fluidos nas fronteiras, e então, propuseram que o fluxo cruzado, ou seja, o fluxo proveniente do esquema nove-pontos, deveria ser decomposto em uma parcela perpendicular a fronteira e outra paralela a mesma, como pode ser visto na Fig. 7.6. Observaram que a parcela perpendicular deveria ser zerada e a outra adicionada ao volume vizinho.

Os testes realizados mostraram que zerando a mobilidade no contorno acarretava em um atraso na frente de saturação junto as fronteiras, e portanto, a frente calculada não era radial. No entanto, com a correção proposta por Bajor e Cormack a frente tornava-se radial, sem atraso apresentado na outra condição.

7.2.4.1 Implementação da Correção de Bajor e Cormack no Sistema Generalizado

Como explicado na seção 7.2.4, a correção da condição de contorno de fluxo nulo para o esquema nove-pontos é realizada através da decomposição do fluxo proveniente deste esquema em duas parcelas. A parcela paralela a fronteira é somada ao balanço do volume vizinho.

Da Eq.(7.16) sabe-se que o módulo do fluxo representado na Fig. 7.6 é

$$m_9 = \frac{1}{3} \frac{J_9}{J} \left[D_{11_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} + D_{12_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} + D_{13_9}^w \frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right]_{ne} \Delta \eta_9 \Delta \gamma \Delta t \quad (7.41)$$

onde, devido a simetria tem-se

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \xi_9} \right)_{ne} = \Phi_{NE}^w - \Phi_P^w = \Phi_N^w - \Phi_P^w \quad (7.42)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \eta_9} \right)_{ne} = \Phi_N^w - \Phi_E^w = \Phi_N^w - \Phi_P^w \quad (7.43)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^w}{\partial \gamma} \right)_{ne} = \frac{1}{4} \left[(\Phi_{TN}^w + \Phi_T^w) - (\Phi_{BN}^w + \Phi_B^w) \right] \quad (7.44)$$

Para decompor o fluxo dado pela Eq.(7.41) é necessário primeiramente escrevê-lo na forma de vetor, ou seja,

$$\vec{m}_9 = m_9 \hat{e}^{\xi_9} \quad (7.45)$$

onde,

\hat{e}^{ξ_9} - vetor de base contravariante na direção ξ_9 normalizado, ver Eq.(7.46);

$$\hat{e}^{\xi_9} = \frac{\vec{e}^{\xi_9}}{|\vec{e}^{\xi_9}|} = \frac{\frac{\partial \xi_9}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \xi_9}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \xi_9}{\partial z} \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi_9}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_9}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_9}{\partial z} \right)^2}} \quad (7.46)$$

Com o vetor dado pela Eq.(7.45), decompõe-se segundo a seguinte equação:

$$m_{9\text{-correção}} = \overrightarrow{m_9} \cdot \hat{e}^\eta \quad (7.47)$$

onde,

\hat{e}^η - vetor de base contravariante na direção η normalizado, ver Eq.(7.48);

$$\hat{e}^\eta = \frac{\vec{e}^\eta}{|\vec{e}^\eta|} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \quad (7.48)$$

7.3 Esquema Nove-Pontos de Alta Resolução

O esquema nove-pontos de alta resolução foi idealizado por Wolcott *et al.* (1996). Consiste na utilização da formulação de Yanosik-MacCracken com as mobilidades avaliadas pelo esquema TVD de 3ª ordem.

O esquema nove-pontos de alta resolução utilizado neste trabalho é idêntico ao apresentado na seção 7.2 com as mobilidades aproximadas pelo esquema TVD.

7.3.1 Avaliação das Mobilidades para Nove-Pontos de Alta Resolução

Na sua tese de doutorado, Wolcott (1996) afirma que o esquema de alta resolução para obter bons resultados deve ser aplicado a todas as faces, incluindo as faces diagonais. Afirma também, que testes foram realizados com avaliação de baixa ordem para as mobilidades nas faces diagonais e de alta resolução para as faces diretas. Desta maneira, obteve forte efeito de orientação de malha mas com característica inversa ao esquema cinco-pontos tradicional, ou seja, para a configuração *five-spot* calculou-se uma recuperação de óleo maior para malha paralela do que a diagonal. Portanto neste trabalho implementou-se o esquema de alta resolução TVD em todas as faces.

A avaliação das mobilidades segue o procedimento explanado na seção 5.3.3. Para não haver dúvidas segue as aproximações apenas nos pontos cruzados para a equação da água, Eq.(7.16):

- Face nordeste (*north-east*) - sentido positivo

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \bar{n}} \right)_{ne} < 0 \rightarrow \lambda_{ne}^w = \left(\lambda_p^w + \frac{\bar{L}_P^{\xi_9}}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_{ne}^w * \Psi(r_{ne}^w) \right)^* \quad (7.49)$$

onde,

$$r_{ne}^w = \frac{A_{sw}^w}{A_{ne}^w} \quad (7.50)$$

$$A_{ne}^w = \frac{\vec{L}_P^{\xi_9}}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_{ne}^w \quad (7.51)$$

$$A_{sw}^w = \frac{\vec{L}_P^{\xi}}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_{sw}^w \quad (7.52)$$

- Face nordeste (*north-east*) - sentido negativo

$$\left(\frac{\partial \Psi^w}{\partial \vec{n}} \right)_{ne} > 0 \rightarrow \lambda_{ne}^w = \left(\lambda_{NE}^w - \frac{\vec{L}_{NE}^{\xi_9}}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_{ne}^w * \Psi(r_{ne}^w) \right)^* \quad (7.53)$$

onde,

$$r_{ne}^w = \frac{A_{nee}^w}{A_{ne}^w} \quad (7.54)$$

$$A_{nee}^w = \frac{\vec{L}_{NE}^{\xi_9}}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_{nee}^w \quad (7.55)$$

$$A_{ne}^w = \frac{\vec{L}_{NE}^{\xi}}{2} \cdot \vec{\nabla} \lambda_{ne}^w \quad (7.56)$$

O vetor comprimento na direção ξ_9 é definido de maneira análoga a apresentada na Eq.(5.27), ou seja,

$$\vec{L}_P^{\xi_9} = \left(\Delta \xi_9 \cdot x_{\xi_9} \hat{i} + \Delta \eta_9 \cdot y_{\xi_9} \hat{j} + \Delta \gamma \cdot z_{\xi_9} \hat{k} \right)_P \quad (7.57)$$

As avaliações relativas à mobilidade para as outras faces da equação da água e para o componente óleo e gás seguem o mesmo procedimento.

8 Resultados e Discussões

Neste capítulo os diferentes esquemas numéricos apresentados, cinco-pontos com mobilidade avaliada pelo esquema UDS, TVD, ENO, MUDS ou MUDS LED e nove-pontos com mobilidade avaliada por UDS ou TVD, são testados e comparados em vários problemas. Quando existentes, soluções analíticas ou *benchmark* são utilizados como referência para auxiliar nas discussões e validar a implementação dos esquemas.

O objetivo desta seção é demonstrar através dos resultados numéricos os seguintes pontos chaves:

- O efeito de orientação de malha é função da forma das curvas de permeabilidade realtiva, razão de mobilidade e do refino de malha.
- Resultados obtidos no sistema cartesiano também devem ser obtidos no sistema generalizado, pois existe apenas uma transformação de sistema de coordenadas.
- Os benefícios dos esquemas TVD e ENO advém de melhor captura da descontinuidade.
- Os esquemas nove-pontos reduzem bastante o efeito de orientação de malha.

8.1 Problemas Unidimensionais

Nesta seção analisa-se o comportamento das soluções numéricas para a equação de Buckley-Leverett, que rege o fluxo incompressível água-óleo em uma dimensão, utilizando os esquemas UDS, TVD e ENO. Soluções são apresentadas para curvas de permeabilidades relativas lineares e não-lineares com o intuito de mostrar a influência das mesmas sobre os resultados numéricos.

Obviamente nenhuma análise de erro de orientação de malha é possível para problemas unidimensionais, no entanto, estes auxiliam sobremaneira o entendimento e a análise dos comportamentos dos esquemas numéricos para os problemas bidimensionais, como pode ser visto na seção 8.2.

8.1.1 Buckley-Leverett

O problema é governado pela seguinte equação hiperbólica,

$$\phi \frac{\partial S^w}{\partial t} + u_T \cdot \frac{\partial f^w}{\partial x} = 0 \quad (8.1)$$

onde,

- u_T - é a soma da velocidade da água mais a do óleo chamada de velocidade total,
- f^w - é o fluxo fracionário da água, dado pela Eq.(8.2)

$$f^w = \frac{\lambda^w}{\lambda^w + \lambda^o} \quad (8.2)$$

A dedução desta equação pode ser vista em Pinto (1991).

As condições de contorno e iniciais são:

$$S^w(x,0) = S^{wc}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} S^w(0,t) = 1 - S^{wc}, & t \geq 0 \\ \left. \frac{\partial S^w}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

Aplicando o método dos Volumes Finitos, com formulação explícita, chega-se a seguinte equação discretizada:

$$S_p^w = S_p^{w0} - \frac{CFL}{\phi} \cdot [f_e^w - f_w^w] \quad (8.4)$$

onde,

- f_e^w - fluxo fracionário avaliado na interface e (leste) para o tempo $t - \Delta t$,
- CFL - número de Courant-Fredrichs-Lewy, dado por

$$CFL = \frac{u_T \Delta t}{\Delta x} \quad (8.5)$$

Apresenta-se os resultados numéricos para uma curva de permeabilidade relativa linear e outra não-linear com a intenção de mostrar que o comportamento apresentado pelos esquemas numéricos depende destas (não somente). Os valores de viscosidade e fator volume de formação utilizados são:

Tabela 8.1 – Viscosidade e fator volume de formação utilizados

| Propriedades | Água | Óleo |
|---------------|-------|------|
| μ (N/m.s) | 1.0/M | 1.0 |
| B | 1.0 | 1.0 |

A velocidade total utilizada foi de 1 m/s e as permeabilidades relativas seguem as Eqs.(8.6) e (8.7).

$$k^{rw} = k^{rw0} \left(\frac{S^w - S^{wc}}{1 - S^{wc} - S^{or}} \right)^{nw} \quad (8.6)$$

$$k^{ro} = k^{ro0} \left(\frac{1 - S^w - S^{or}}{1 - S^{wc} - S^{or}} \right)^{no} \quad (8.7)$$

onde,

- k^{rw0} - valor da permeabilidade relativa à água para uma saturação de $1 - S^{or}$;
- S^{wc} - valor da saturação de água conacta, ou seja, irreduzível;
- nw - valor do expoente da permeabilidade relativa à água no sistema água-óleo;

- k^{ro^0} - valor da permeabilidade relativa ao óleo para uma saturação de água irreduzível;
- S^{or} - valor da saturação de óleo residual;
- no - valor do expoente da permeabilidade relativa ao óleo no sistema água-óleo.

8.1.1.1 Permeabilidades Relativas Lineares

Para este tipo de permeabilidade relativa as constantes das Eqs.(8.6) e (8.7) são dadas pela tabela 8.2.

Tabela 8.2 – Constantes das curvas de permeabilidades relativas para o caso linear, Eqs.(8.6) e (8.7)

| Constantes | Valor |
|------------|-------|
| k^{rw^0} | 1.0 |
| k^{ro^0} | 1.0 |
| S^{wc} | 0.0 |
| S^{or} | 0.0 |
| nw | 1.0 |
| no | 1.0 |

A solução analítica para a equação de Buckley-Leverett, Eq.(8.1), com as permeabilidades relativas dada pela tabela 8.2 e com $M = 1$ é um pulso de água sendo advectado com a velocidade total, ou seja, u_T . As Figs. 8.1 e 8.2 mostram os resultados obtidos para os vários esquemas.

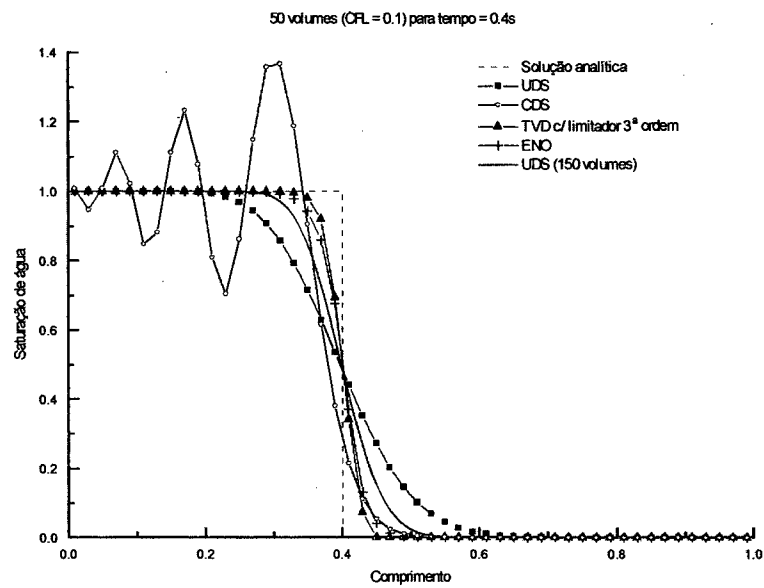


Figura 8.1 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 1$

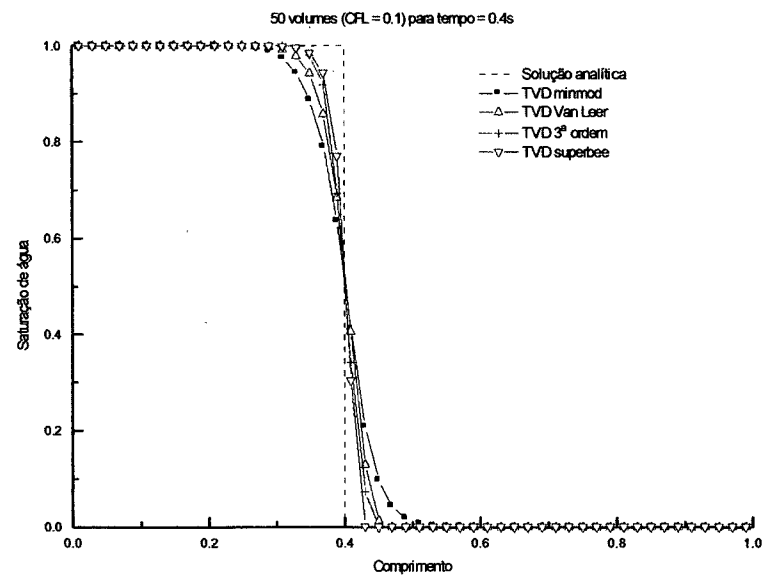


Figura 8.2 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 1$

Pode-se concluir através das Figs. 8.1 e 8.2 que:

- O esquema UDS introduz excessiva difusão numérica descaracterizando a frente de deslocamento.
- Como era esperado o esquema CDS provoca o aparecimento de oscilações tornando o seu uso impróprio.
- Verifica-se também que os esquemas TVD e ENO obtêm resultados sem oscilação e muito melhores que o esquema UDS para uma quantidade de células, deste, três vezes maior.
- Resultados semelhantes são obtidos pelo esquema TVD com limitador de 3ª ordem e o ENO.
- Conclui-se que, para este caso, é recomendável utilizar os limitadores que introduzem menor difusão numérica como o *Superbee* e o de 3ª ordem, ou seja, limitadores mais próximos do limite superior da região de Sweby, ver seção 5.3.2.

Com o intuito de analisar os efeitos da razão de mobilidade nas soluções obtidas pelos esquemas, resolve-se o mesmo caso mas com razão de mobilidade igual a 2. As Figs. 8.3 e 8.4 mostram os resultados.

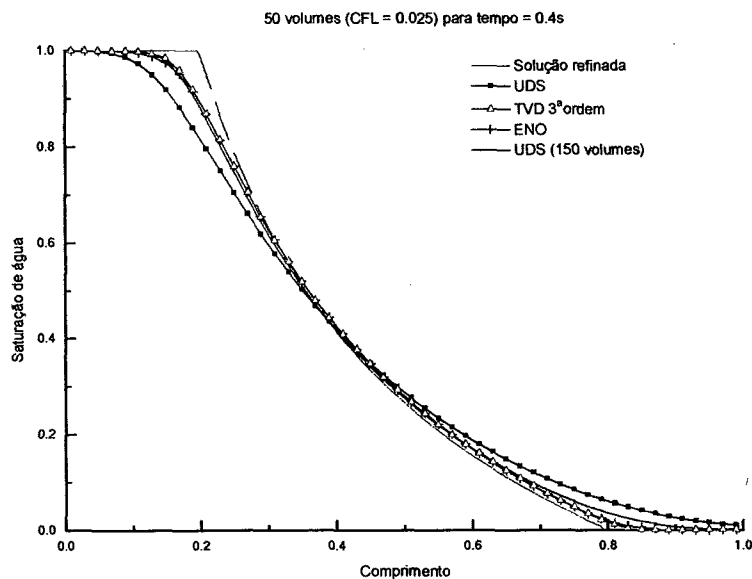


Figura 8.3 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 2$

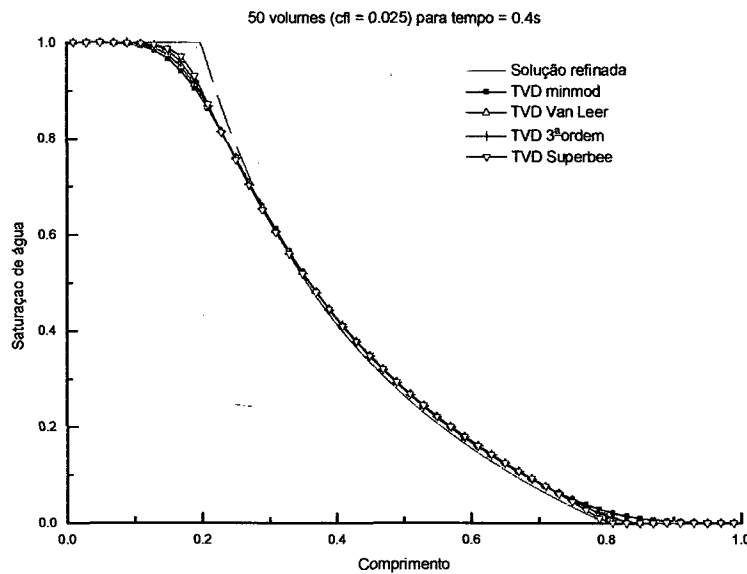


Figura 8.4 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas lineares e $M = 2$

Pode-se concluir através das Figs. 8.3 e 8.4 que:

- O aumento da razão de viscosidade torna a frente de deslocamento mais suave, análogo ao que se percebe com a introdução de difusão numérica. Como pode-se verificar, este fato acaba por diminuir a diferença entre as soluções apresentadas pelos diversos esquemas.
- Os esquemas TVD e ENO obtêm resultados sem oscilação e melhores que o esquema UDS.
- Resultados semelhantes são obtidos pelo esquema TVD com limitador de 3ª ordem, o ENO e o esquema UDS com malha refinada em três vezes.
- A diferença obtida pelos vários limitadores, Fig. 8.4, é desprezível.

8.1.1.2 Permeabilidades Relativas Não-Lineares

Para representar as permeabilidades relativas não-lineares escolheu-se as constantes dadas pela tabela 8.3.

Tabela 8.3 – Constantes das curvas de permeabilidade relativas não-lineares, Eqs.(8.6) e (8.7)

| Constantes | Valor |
|------------|-------|
| k^{rw^0} | 1.0 |
| k^{ro^0} | 1.0 |
| S^{wc} | 0 |
| S^{or} | 0 |
| nw | 2 |
| no | 2 |

A solução para a equação de Buckley-Leverett, Eq.(8.1), com as permeabilidades relativas dadas pela tabela 8.3 e com $M = 1$ é um pulso de água sendo advectado com uma região suave atrás do mesmo de pequena altura. Esta região existe quando há diferença entre a altura da frente de choque e a saturação máxima de água, ou seja, $1 - S^{or}$. A velocidade de advecção da frente de saturação pode ser obtida da condição de Rankine-Hugoniot. As Figs. 8.5 e 8.6 mostram os resultados obtidos para os vários esquemas.

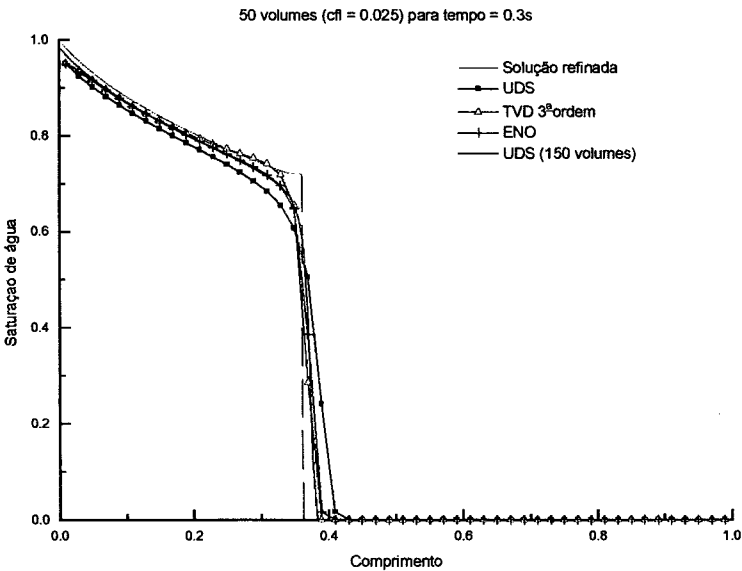


Figura 8.5 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 1$

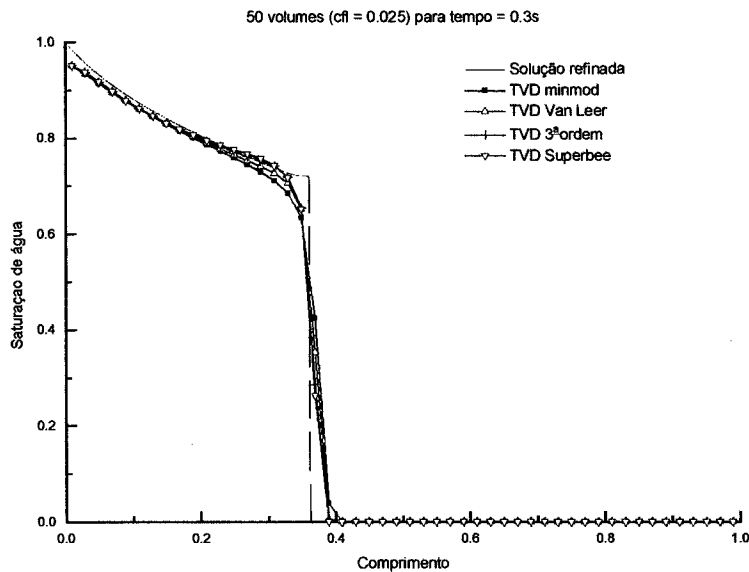


Figura 8.6 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 1$

Pode-se verificar através das Figs. 8.5 e 8.6 que:

- O esquema UDS introduz difusão numérica mas diferentemente do problema anterior, apresentado na Fig. 8.1, a descaracterização da frente foi menor.
- Os esquemas TVD e ENO obtêm resultados sem oscilação e similares ao esquema UDS para uma quantidade de células, deste último, três vezes maior.
- A partir da Fig. 8.6 verifica-se em comparação com o caso da seção 8.1.1.1, que as soluções numéricas tornaram-se menos sensíveis as diversas funções limitadoras. No entanto, ainda é recomendável utilizar os limitadores que introduzem menor difusão numérica como o *Superbee* e o de 3ª ordem.
- Conclui-se que a dispersão introduzida pela pequena região suave atrás da frente de choque, facilita a captura da descontinuidade, diminuindo a diferença entre os resultados obtidos por um esquema altamente dispersivo, como UDS, e os esquemas de alta resolução, como TVD e ENO.

Com o intuito de analisar os efeitos da razão de mobilidade nas soluções obtidas pelos esquemas, resolve-se o mesmo caso mas com razão de mobilidade igual a 2. As Figs. 8.7 e 8.8 mostram os resultados.

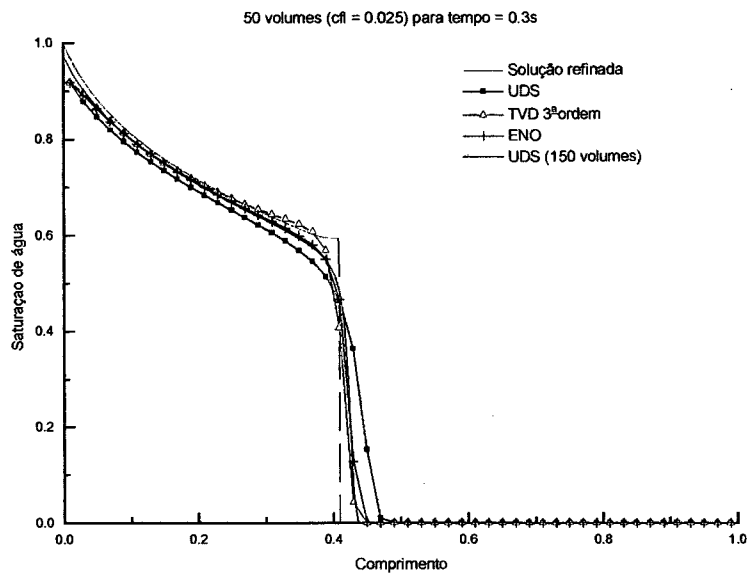


Figura 8.7 – Comparação dos esquemas para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 2$

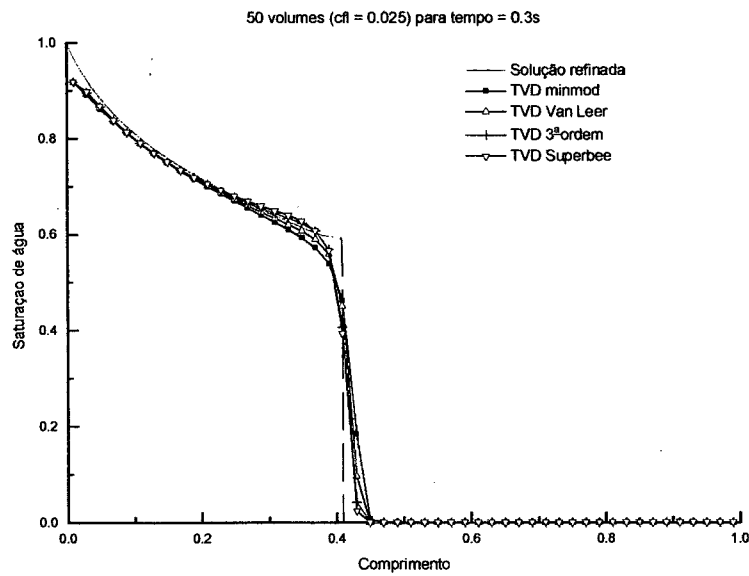


Figura 8.8 - Comparação entre os limitadores TVD para equação de Buckley-Leverett com permeabilidades relativas não-lineares e $M = 2$

Pode-se verificar através das Figs. 8.7 e 8.8 que:

- O esquema UDS introduz difusão numérica mas novamente diferente do problema anterior, apresentado na Fig. 8.1, a descaracterização da frente foi menor.
- Os esquemas TVD e ENO obtêm resultados sem oscilação e similares ao esquema UDS para uma quantidade de células, deste último, três vezes maior.
- A partir da Fig. 8.8 verifica-se em comparação com o caso da seção 8.1.1.1, que as soluções numéricas tornaram-se menos sensíveis as diversas funções limitadoras. Comparando as Figs. 8.6 e 8.8 não é possível concluir nenhum efeito do aumento da razão de mobilidade sobre a sensibilidade das soluções numéricas. Isto acontece, pois nos dois casos existe uma região suave atrás da frente de choque, e portanto, torna-se difícil distinguir o efeito ocasionado pelo aumento da razão de mobilidade do efeito da não-linearidade.

8.2 Problemas Bidimensionais

Nesta seção analisa-se o comportamento de todos os esquemas apresentados neste trabalho quanto ao efeito de orientação de malha. Os resultados obtidos são apresentados através de gráficos de corte de água, mapas de saturação e tabelas comparativas entre *breakthrough*. Esclarece-se que *breakthrough* é o instante de aparecimento de água nos poços produtores. Este instante é definido nos gráficos de corte de água quando o corte de água alcança o valor de 0.1%.

Os gráficos de corte de água e as tabelas de *breakthrough* enfatizam as conseqüências globais do efeito de orientação de malha, e portanto, não o caracterizam propriamente. Os mapas de saturação, por sua vez, permitem caracterizar o efeito de orientação de malha e a difusão numérica através da análise qualitativa dos contornos de saturação, por exemplo, visualizando a distorção e a dispersão da frente de saturação. Os testes são divididos em problemas em coordenadas cartesianas e generalizadas.

8.2.1 Coordenadas Cartesianas

8.2.1.1 Configuração *Five-Spot*

Configuração formada por quatro poços injetores em cada face de um quadrado e um poço produtor no centro. A malha diagonal representa um quarto de *five-spot*, com linhas a 45° da direção que conecta o poço injetor ao poço produtor. Por sua vez, a malha paralela representa metade de *five-spot*, com linhas paralelas ou perpendiculares à linha que conecta o par de poços produtor-injetor.

8.2.1.1.1 Permeabilidades Relativas Lineares

Este problema foi resolvido por Pinto (1991) e consiste na injeção de água em um reservatório bidimensional homogêneo e isotrópico, horizontal, com configuração *five-spot*. As curvas de permeabilidade relativa são definidas pela Eqs.(8.6) e (8.7) com constantes dadas pela tabela 8.2. A tabela 8.4 traz os dados referentes a este problema.

Tabela 8.4 – Dados do problema de configuração *Five-Spot* com permeabilidades relativas lineares

| Dados | Valor |
|----------------------------|---|
| Pressão inicial | 2.07×10^7 (3000 psi) |
| Saturação inicial de água | 0 |
| Espessura | 5.0 m |
| Comprimento | 706.9 m |
| Largura | 706.9 m |
| Porosidade | 0.05 |
| Densidade | $\rho^w = \rho^o = 1000 \text{ kg/m}^3$ |
| Viscosidade da água | $\mu^w = \frac{10^{-3}}{M} \text{ N.s/m}^2$ $(\mu^w = \frac{1}{M} \text{ cp})$ |
| Viscosidade do óleo | $\mu^o = 10^{-3} \text{ N.s/m}^2$ ($\mu^o = 1 \text{ cp}$) |
| Fator volume de formação | $B^w = B^o = 1$ |
| Permeabilidade absoluta | $1.97 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ (200 mD) |
| Vazão de água injetada | $9.2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ (5000STB/d) |
| Vazão de líquido produzido | $9.2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ (5000STB/d) |

As dimensões, comprimento e largura, dadas na tabela acima referem-se a malha diagonal, e portanto, as dimensões da malha paralela são 1000m x 1000m x 5m calculadas por um fator de $\sqrt{2}$.

Simulou-se a malha diagonal 10x10 e a malha paralela 14x14 e as malhas refinadas diagonal 30x30 e paralela 42x42. Estas soluções são comparadas com a solução semi-analítica de Le Blanc e Caudle (1971) apresentada por Pinto. Com a preocupação de analisar apenas a difusão numérica e não os erros de truncamento temporais, realizou-se um estudo de refino temporal. Soluções com erro de truncamento temporal desprezíveis foram obtidas para Δt de 10^{-2} dias.

As Figs. 8.9 a 8.20 e a tabela 8.5 apresentam os resultados obtidos, para este problema com M igual a 1, aplicando-se UDS, TVD para várias funções limitadoras, ENO, MUDS, MUDS LED, UDS nove-pontos e TVD nove-pontos para várias funções limitadoras.

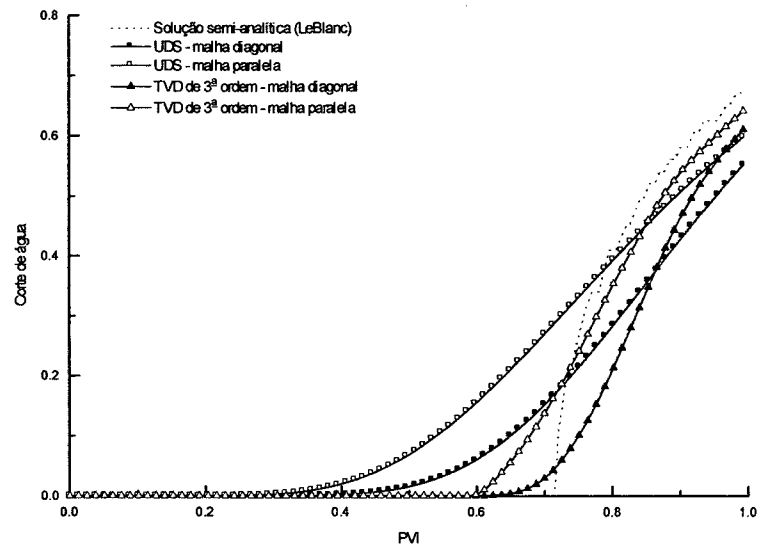


Figura 8.9 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

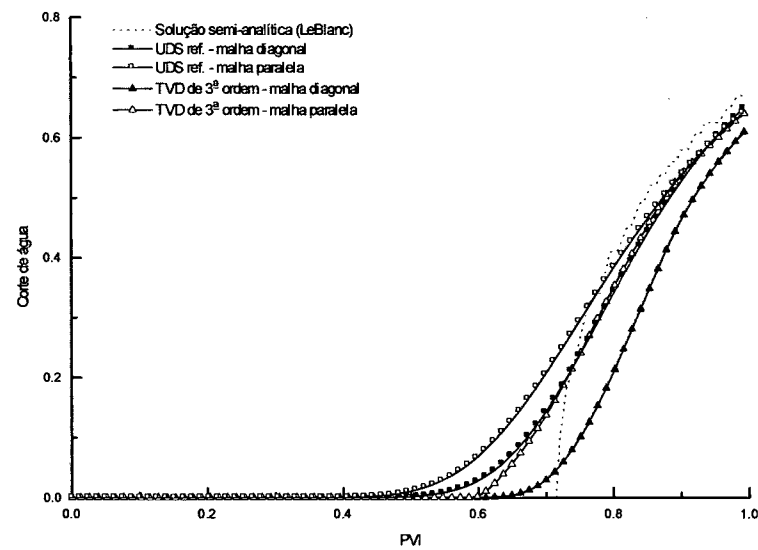


Figura 8.10 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

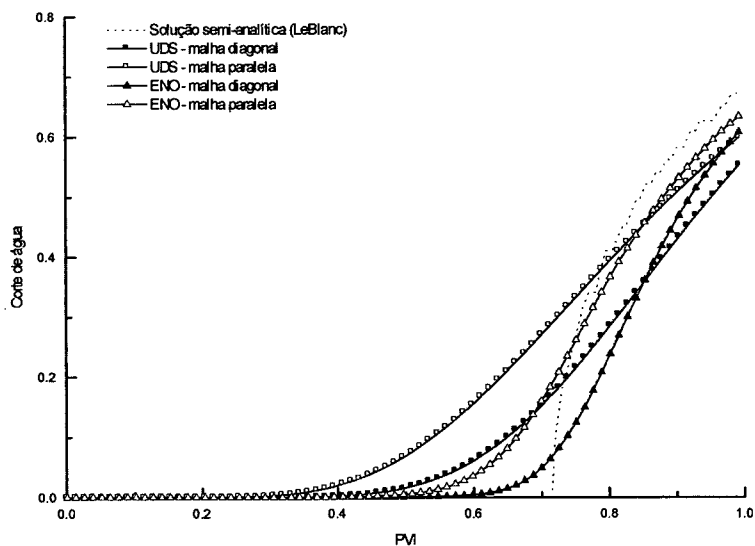


Figura 8.11 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

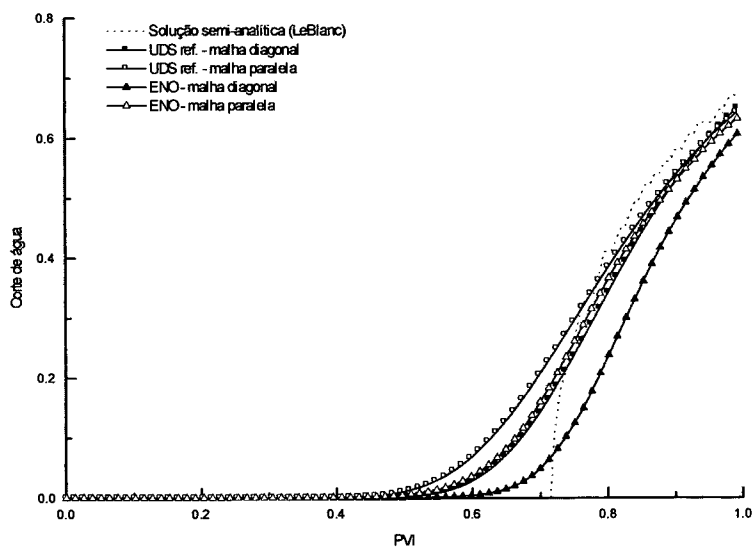


Figura 8.12 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

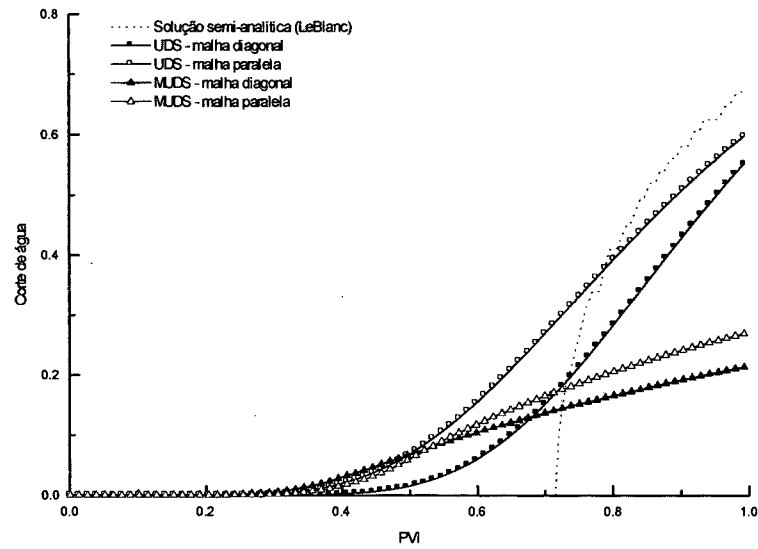


Figura 8.13 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

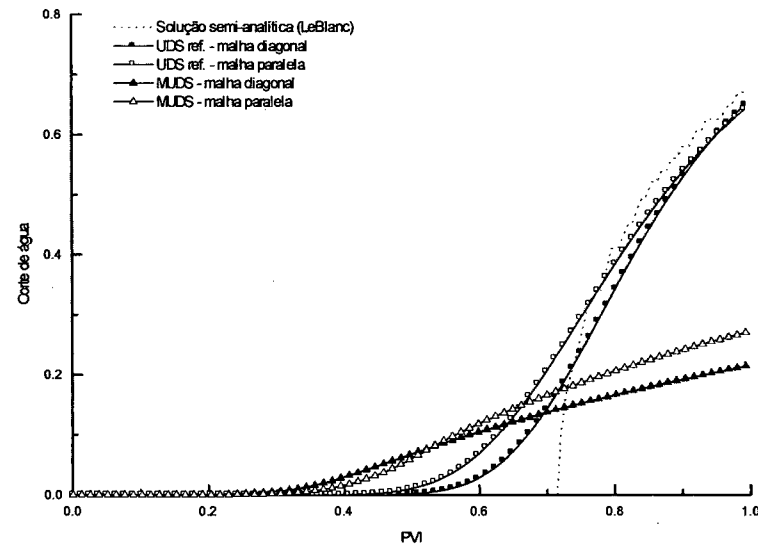


Figura 8.14 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

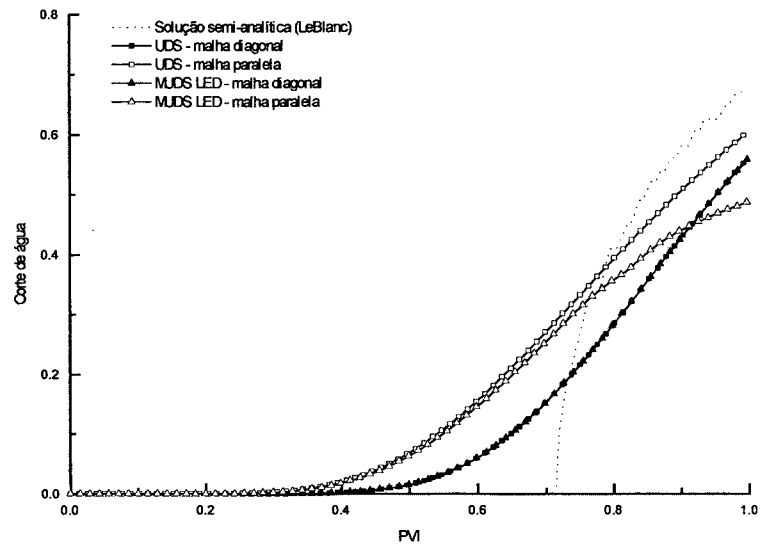


Figura 8.15 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS LED para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

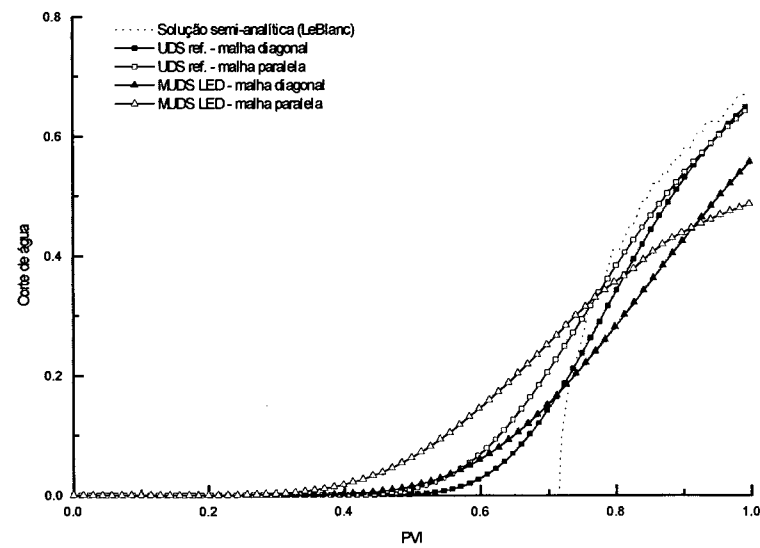


Figura 8.16 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS LED para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

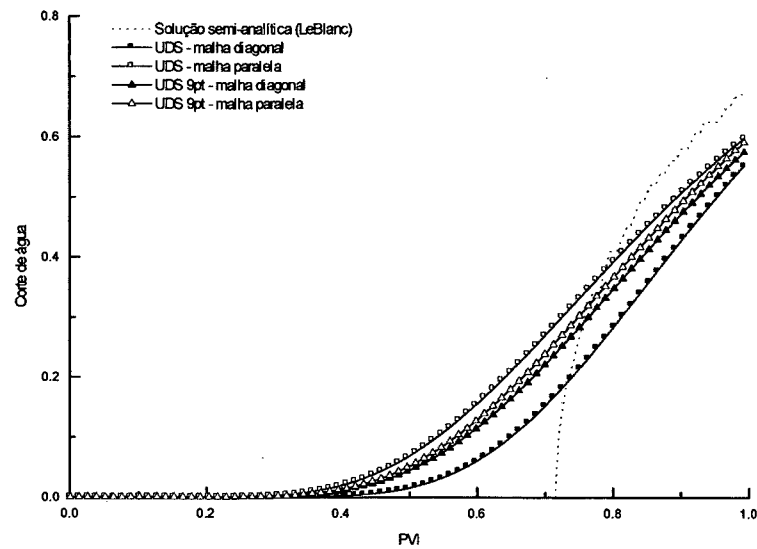


Figura 8.17 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

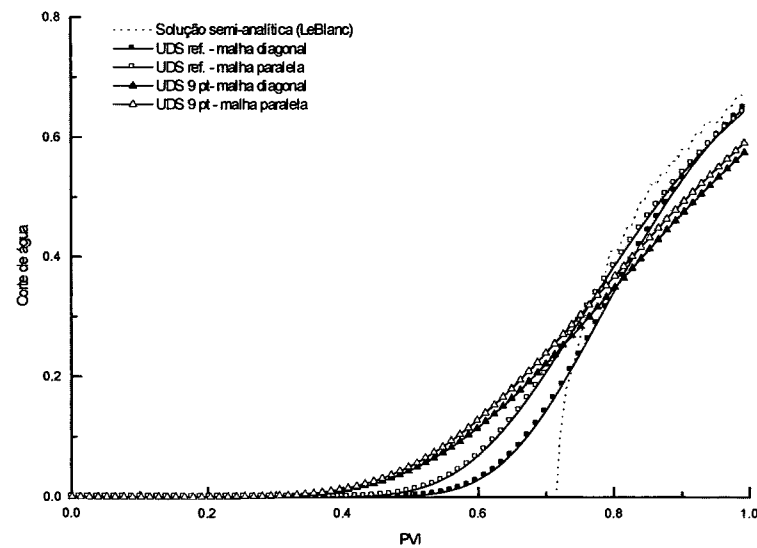


Figura 8.18 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

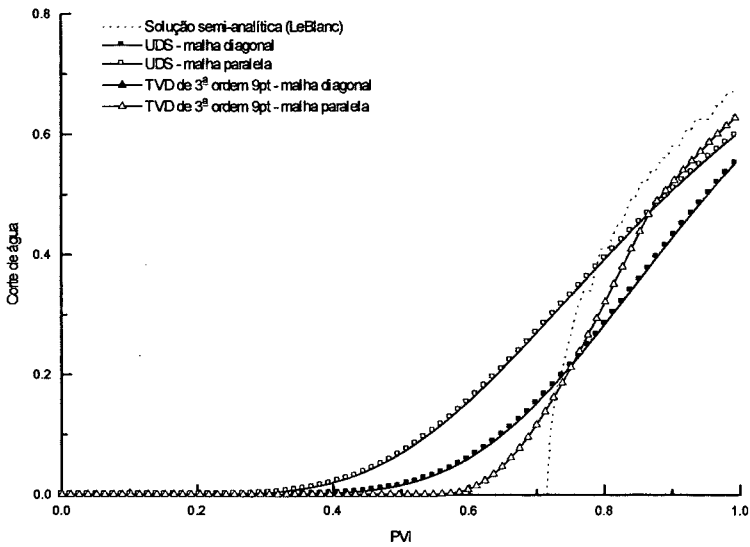


Figura 8.19 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

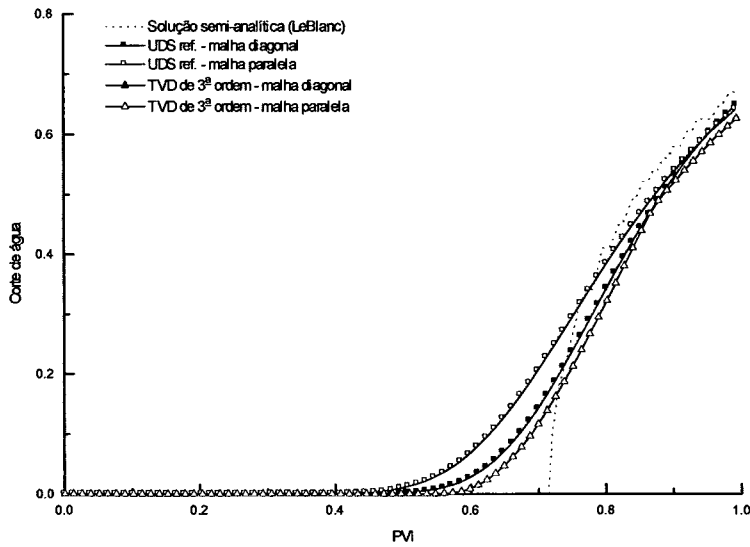


Figura 8.20 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

Através das Figs. 8.9 a 8.20 e a tabela 8.5 pode-se concluir que:

- Os esquemas TVD obtém diferenças de tempo de irrupção menores que o esquema UDS. Observa-se que utilizando a função limitadora Superbee obtém-se diferença de *breakthrough* menor que a obtida pelo esquema UDS com malha refinada.
- Os esquemas TVD obtém curvas de corte de água menos suavizadas. Este fato advém diretamente da melhor captura da frente de deslocamento e tem como consequência o atraso do *breakthrough* dos poços (ficando mais próxima da solução semi-analítica).
- As curvas obtidas com os esquemas TVD estão mais próximas da solução semi-analítica do que as curvas obtidas com o uso do esquema UDS.
- O esquema ENO apresenta resultados melhores que o esquema UDS mais é menos eficiente em diminuir o as diferenças de tempo de irrupção que os esquemas TVD que utilizam função limitadora próximas ao limite superior da região de Sweby (3ª ordem e Superbee).
- O esquema MUDS é eficiente em reduzir as diferenças de *breakthrough* obtendo valores próximos ao esquema TVD com limitador Superbee. No entanto, introduz mais difusão numérica que o esquema UDS. Percebe-se que a difusão numérica introduzida desfigurou as curvas de corte de água. Para este caso o esquema MUDS não é aconselhável.
- O esquema MUDS LED não é eficiente em reduzir as diferenças de *breakthrough*, obtendo valores próximos ao esquema UDS. Para este caso o esquema MUDS LED não é aconselhável.
- O esquema UDS de nove-pontos é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo um valor na ordem de um décimo da diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS. Observa-se ainda, que a diferença entre as curvas de corte de água são muito pequenas. No entanto, as mesmas estão longe da curva semi-analítica. Conclui-se que existe uma homogenização da difusão numérica mas não há redução da mesma comparada à solução obtida com o esquema UDS cinco-pontos.
- O esquema TVD de nove-pontos também é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo um valor na ordem de 30 vezes menor, para a função limitadora minmod, que a diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS. Observa-se ainda, que as curvas de corte de água não apresentam diferença visível e que a difusão numérica introduzida é da ordem da difusão introduzida pelo esquema UDS utilizando malha refinada.

Tabela 8.5 – Tempo de irrupção (*breakthrough*) em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração *five-spot* com permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

| | Diagonal | Paralela | Diferença |
|-----------------|----------|----------|-----------|
| UDS | 0.475 | 0.360 | 0.115 |
| UDS ref. | 0.557 | 0.498 | 0.059 |
| TVD minmod | 0.599 | 0.488 | 0.111 |
| TVD de Van Leer | 0.659 | 0.588 | 0.071 |

| | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|
| TVD 3ª ordem | 0.670 | 0.611 | 0.059 |
| TVD Superbee | 0.707 | 0.666 | 0.041 |
| ENO | 0.635 | 0.536 | 0.099 |
| MUDS | 0.330 | 0.375 | 0.045 |
| MUDS LED | 0.476 | 0.365 | 0.111 |
| UDS nove-pontos | 0.395 | 0.385 | 0.010 |
| TVD minmod nove-pontos | 0.508 | 0.504 | 0.004 |
| TVD de Van Leer nove-pontos | 0.579 | 0.588 | 0.009 |
| TVD 3ª ordem nove-pontos | 0.602 | 0.613 | 0.011 |
| TVD Superbee nove-pontos | 0.644 | 0.681 | 0.037 |

As Figs. 8.21 e 8.22 são mapas de saturação das soluções obtidas pelos vários esquemas do problema de configuração *five-spot*. Estes mapas são construídos através da sobreposição da malha paralela, sempre a direita, com a malha diagonal, sempre a esquerda, rotacionada em 45°. Como é sabido, a solução exata do problema nas duas malhas é idêntica e portanto as linhas de iso-saturação mostradas nos mapas devem ser simétricas. No entanto, pela presença de erros de truncamento introduzidos pelos esquemas numéricos as linhas não são simétricas.

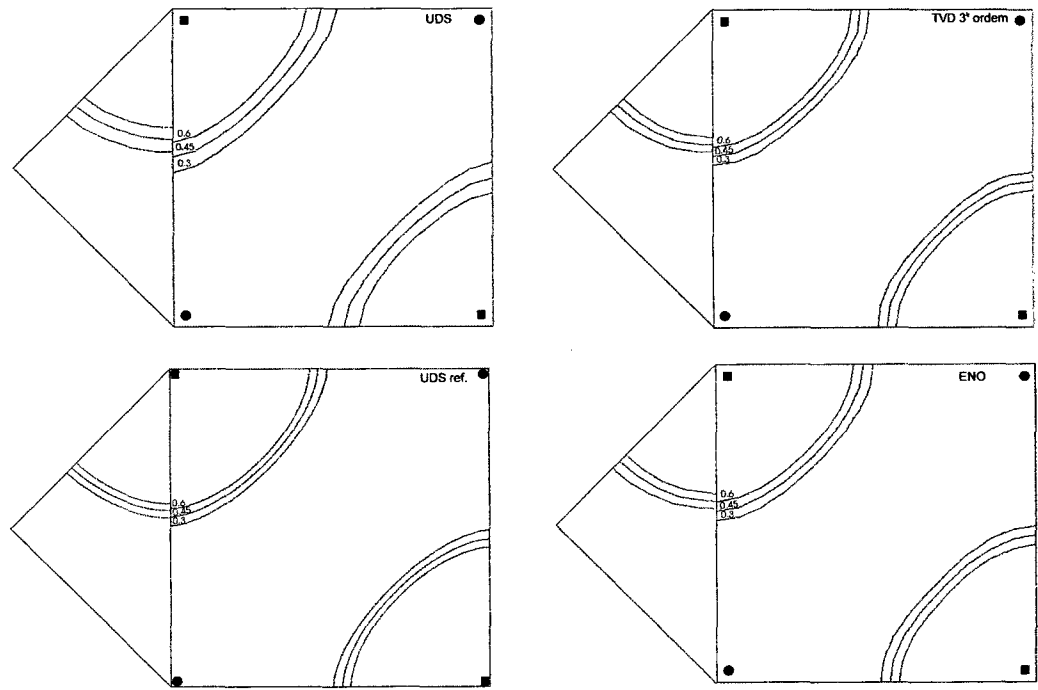


Figura 8.21 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

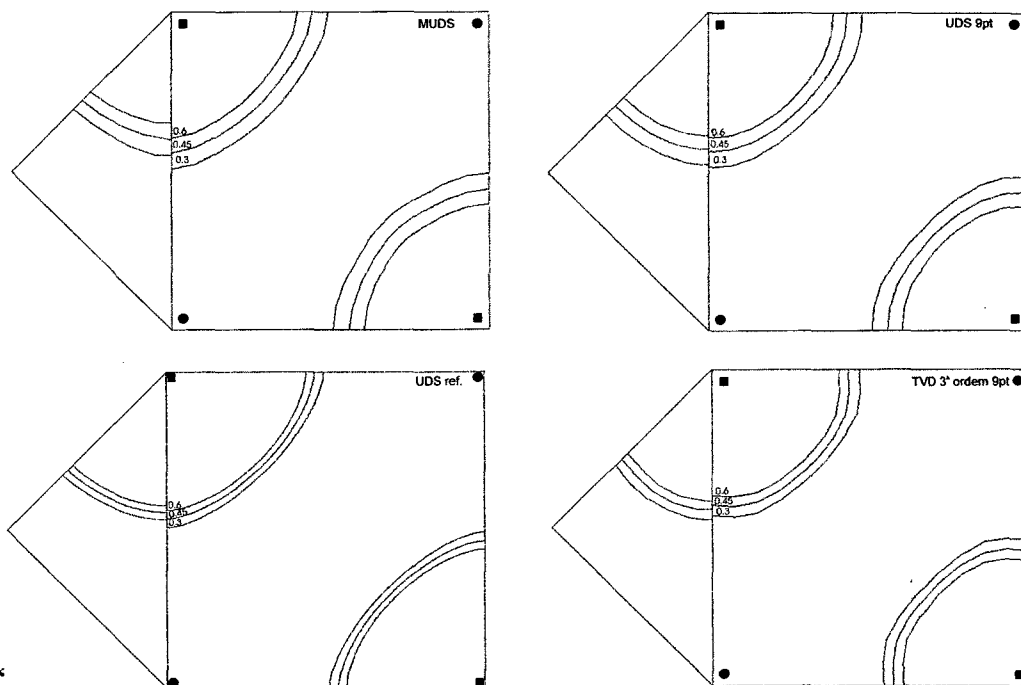


Figura 8.22 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 1$)

Observando-se as Figs. 8.21 e 8.22 verifica-se que:

- Os esquemas TVD e ENO capturam melhor a frente de saturação, traduzido pela maior proximidade entre as linhas, quando comparadas a solução obtida com o esquema UDS, no entanto, verifica-se que não há simetria entre as linhas. Portanto, conclui-se, para este caso, que a redução das diferenças de tempo de irrupção obtida por estes esquemas advém da melhor captura da frente de deslocamento.
- O esquema UDS nove-pontos obtém simetria entre as linhas mas não melhora a captura da frente, portanto, para este caso o esquema reduz o efeito de orientação de malha através da homogeneização dos erros de truncamento mas não há redução de difusão numérica.
- O esquema TVD 3ª ordem nove-pontos captura melhor a frente de saturação em comparação ao esquema UDS de nove-pontos mas é menos eficiente na homogeneização dos erros de truncamento.

Com o intuito de verificar-se o efeito da razão de mobilidade nos resultados obtidos pelos diversos esquemas, simulou-se a malha diagonal 10x10 e 30x30 e a malha paralela 14x14 e 42x42 para M igual a 10. Soluções com erro de truncamento temporal desprezíveis foram obtidas para Δt de 10^{-1} dias.

As Figs. 8.23 a 8.34 e a tabela 8.6 apresentam os resultados obtidos, para este problema com M igual a 10, aplicando-se UDS, TVD para várias funções limitadoras, ENO, MUDS, MUDS LED, UDS nove-pontos, TVD nove-pontos para várias funções limitadoras.

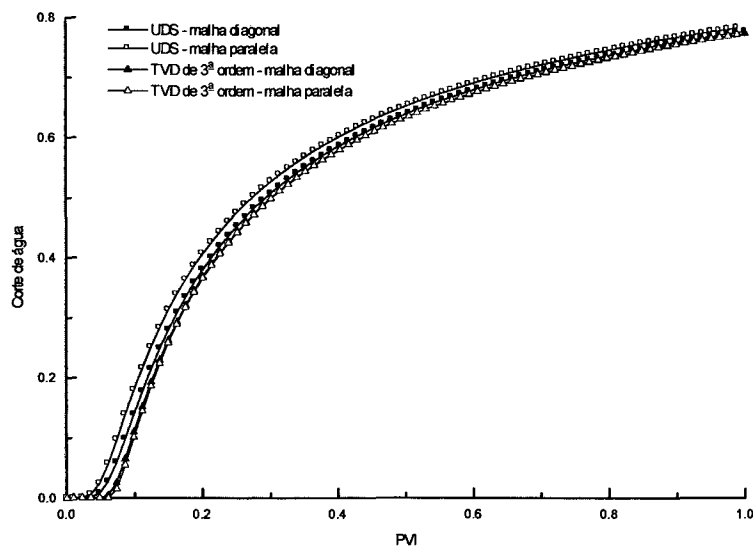


Figura 8.23 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

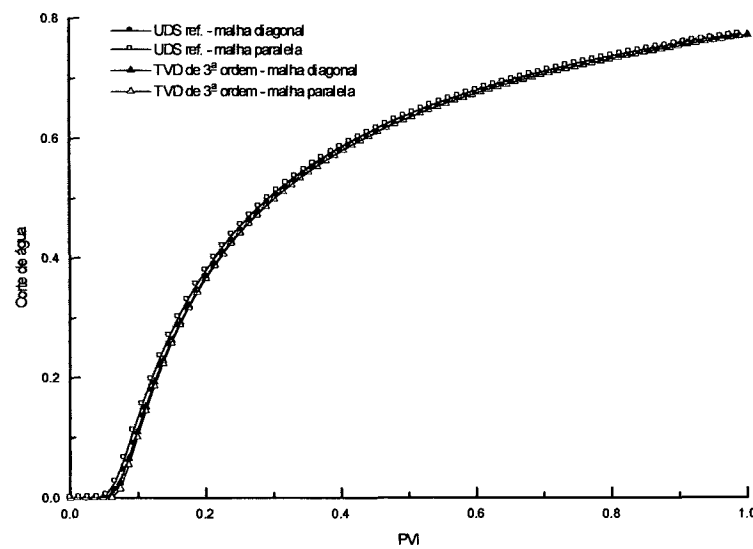


Figura 8.24 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

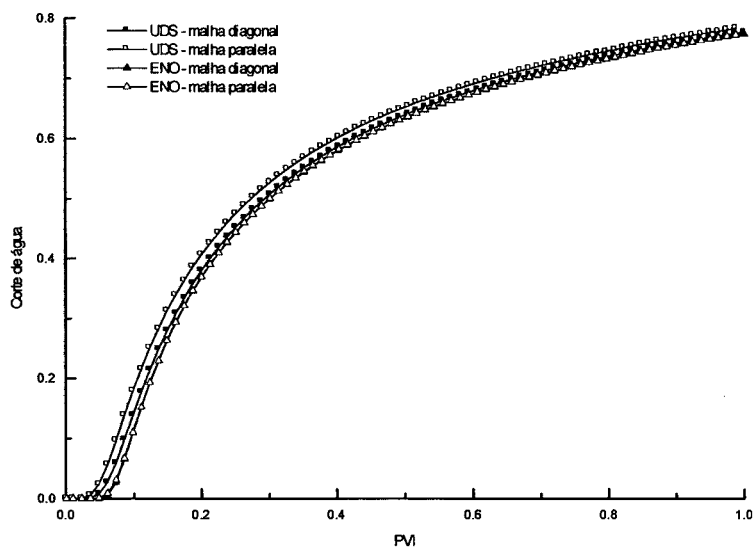


Figura 8.25 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

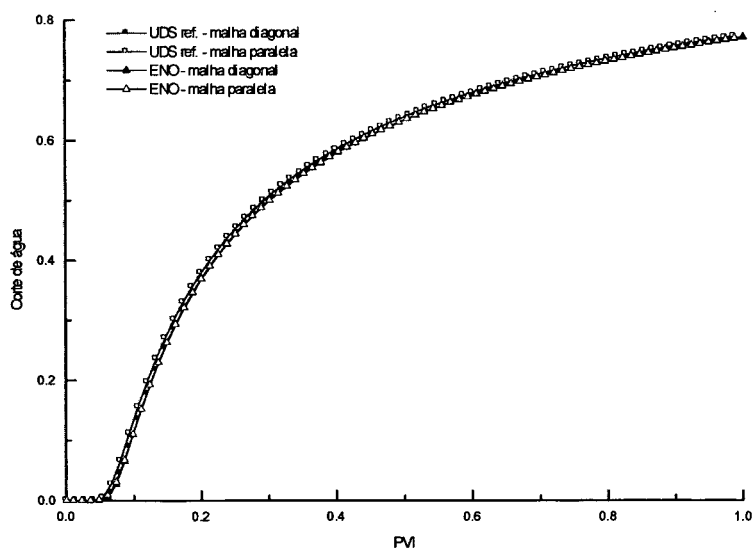


Figura 8.26 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

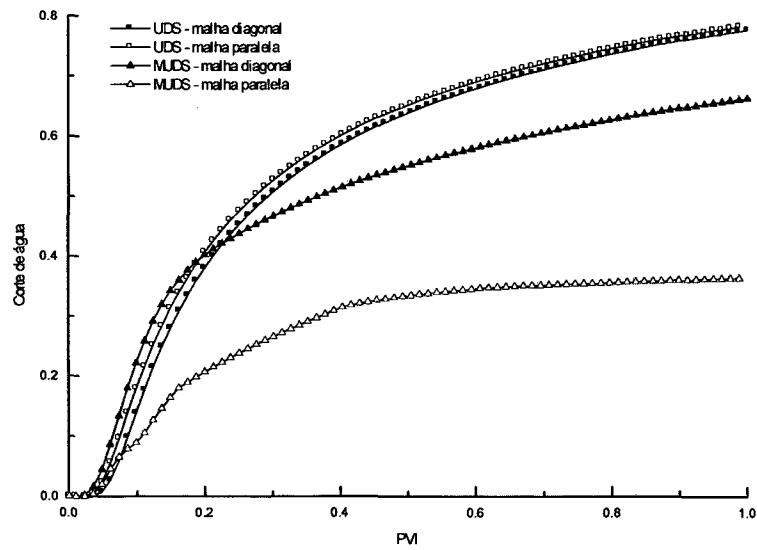


Figura 8.27 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

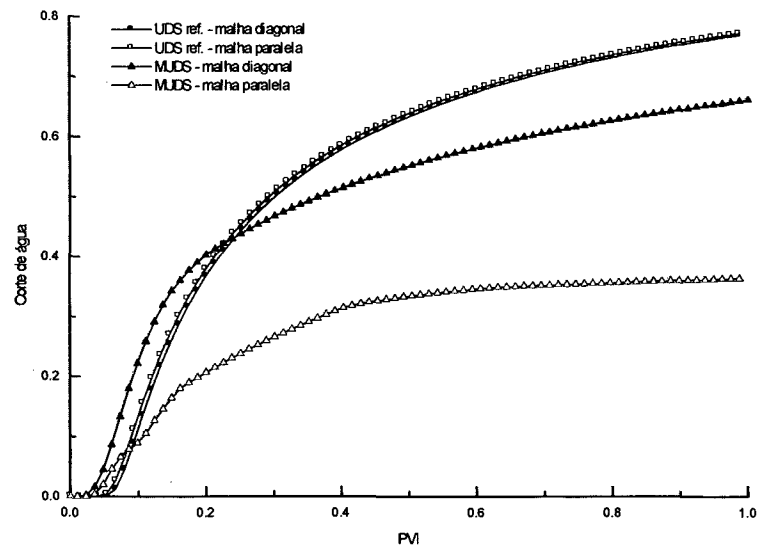


Figura 8.28 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

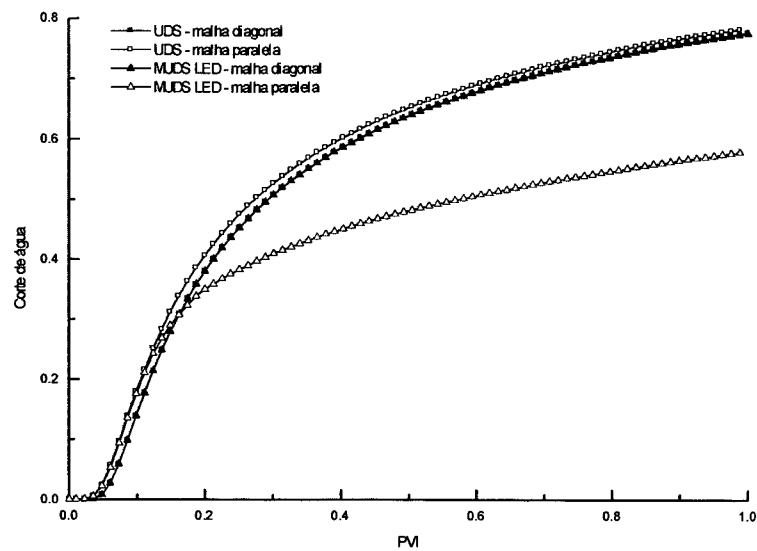


Figura 8.29 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e MUDS LED para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

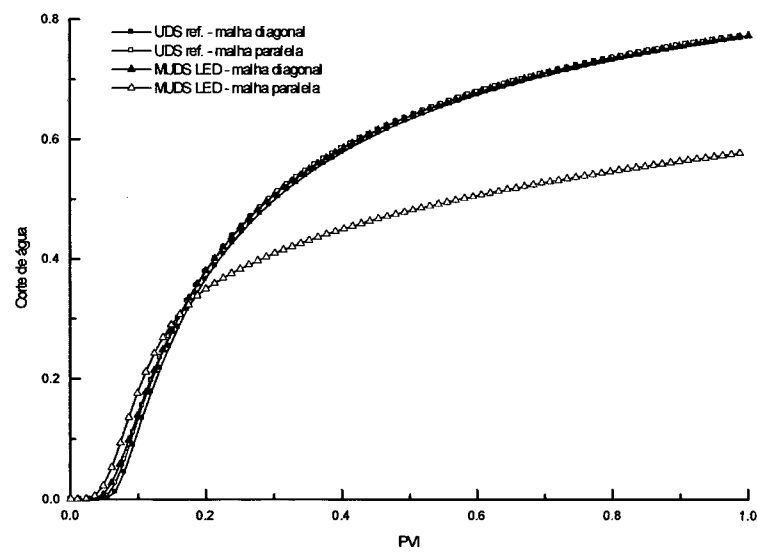


Figura 8.30 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e MUDS LED para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

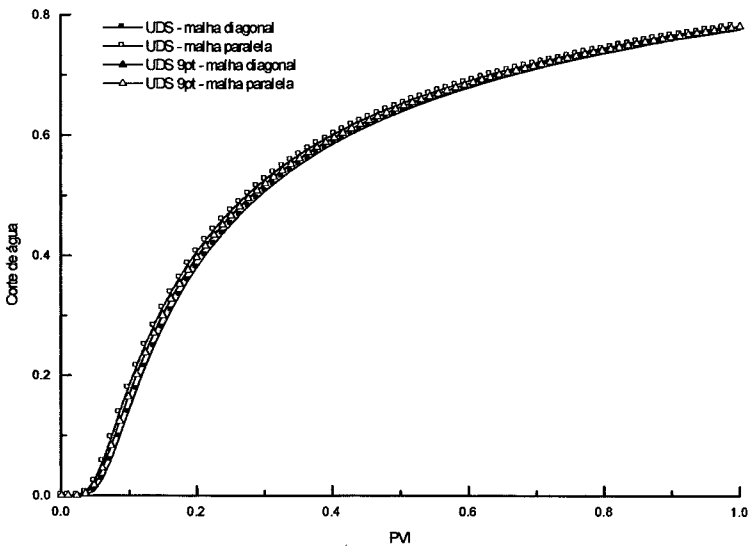


Figura 8.31 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

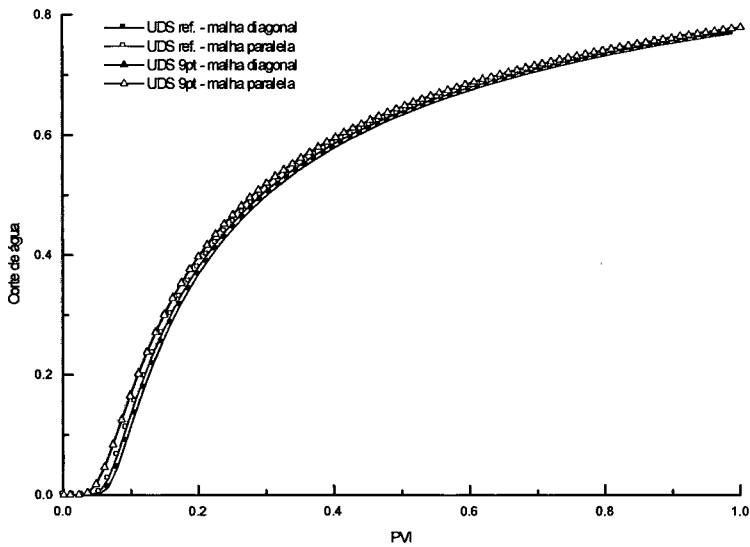


Figura 8.32 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

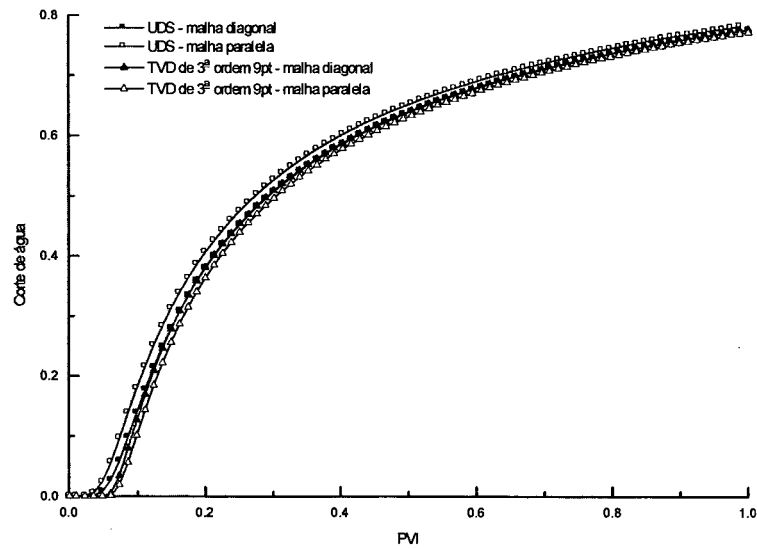


Figura 8.33 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

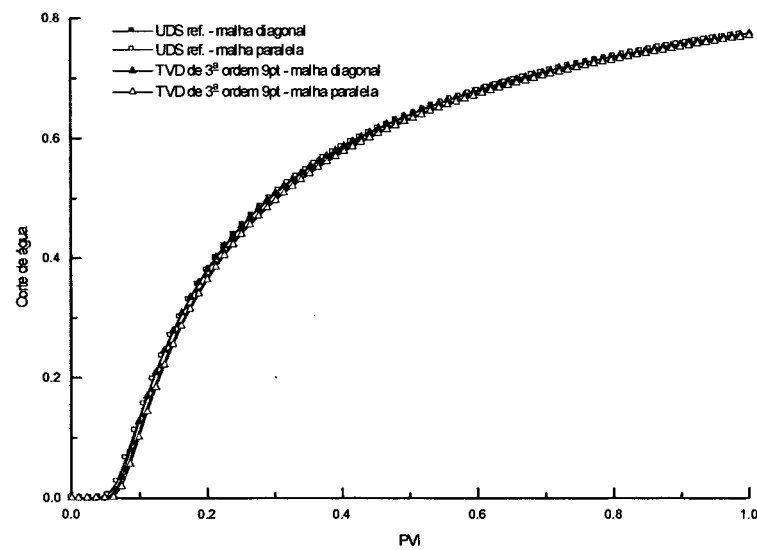


Figura 8.34 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

Através das Figs. 8.23 a 8.34 e a tabela 8.6 pode-se concluir que:

- Os esquemas TVD obtém diferenças de tempo de irrupção bastante menores que o esquema UDS. Utilizando-se as funções limitadoras 3ª ordem e de Van Leer obtém-se diferença de *breakthrough* menor que a obtida pelo esquema UDS com malha refinada.
- O esquema ENO é bastante eficiente na redução do efeito de orientação de malha apresentando diferença de *breakthrough* menores que o esquema UDS com malha refinada.
- O esquema MUDS apesar de apresentar diferença de tempo de irrupção da ordem do esquema UDS, introduzem um efeito de orientação de malha bastante acentuado. Para este caso o esquema MUDS não é aconselhável.
- O esquema MUDS LED também apresenta diferença de tempo de irrupção da ordem do esquema UDS e novamente introduzem um efeito de orientação de malha bastante acentuado. Para este caso o esquema MUDS LED também não é aconselhável.
- O esquema UDS de nove-pontos é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo-se um valor nulo. Observa-se ainda, que não há diferença perceptível entre as curvas de corte de água, no entanto, os tempos de irrupção são adiantados em comparação a solução de malha refinada com esquema UDS. Conclui-se que existe uma homogenização da difusão numérica mas não há redução da mesma.
- O esquema TVD de nove-pontos também é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo um valor na ordem de 6 vezes menor, para a função limitadora minmod, que a diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS. Observa-se ainda, que as curvas de corte de água apresentam uma pequena diferença, no entanto, os tempos de irrupção estão na ordem dos tempos obtidos pelo esquema UDS com malha refinada.

Comparando-se as tabelas 8.5 e 8.6, observa-se que as diferenças de tempo de irrupção entre as diversas funções limitadoras são menores que a apresentada no caso anterior. Semelhante ao apresentado na seção 8.1.1.1, quando utiliza-se uma razão de mobilidade maior do que 1, a dispersão introduzida pela suavização da frente de saturação acaba por diminuir a sensibilidade da solução quanto a função limitadora.

Tabela 8.6 – Tempo de irrupção (*breakthrough*) em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração *five-spot* com permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

| | Diagonal | Paralela | Diferença |
|-----------------|----------|----------|-----------|
| UDS | 0.051 | 0.040 | 0.011 |
| UDS ref. | 0.065 | 0.058 | 0.007 |
| TVD minmod | 0.063 | 0.056 | 0.007 |
| TVD de Van Leer | 0.066 | 0.070 | 0.004 |
| TVD 3ª ordem | 0.066 | 0.071 | 0.005 |
| TVD Superbee | 0.067 | 0.094 | 0.027 |

| | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|
| ENO | 0.066 | 0.063 | 0.003 |
| MUDS | 0.032 | 0.042 | 0.010 |
| MUDS LED | 0.051 | 0.040 | 0.011 |
| UDS nove-pontos | 0.043 | 0.043 | 0.000 |
| TVD minmod nove-pontos | 0.055 | 0.057 | 0.002 |
| TVD de Van Leer nove-pontos | 0.063 | 0.067 | 0.004 |
| TVD 3ª ordem nove-pontos | 0.064 | 0.069 | 0.005 |
| TVD Superbee nove-pontos | 0.075 | 0.085 | 0.010 |

As Figs. 8.35 e 8.36 apresentam os mapas de saturação das soluções obtidas pelos vários esquemas do problema de configuração *five-spot* linear com razão de mobilidade igual a 10.

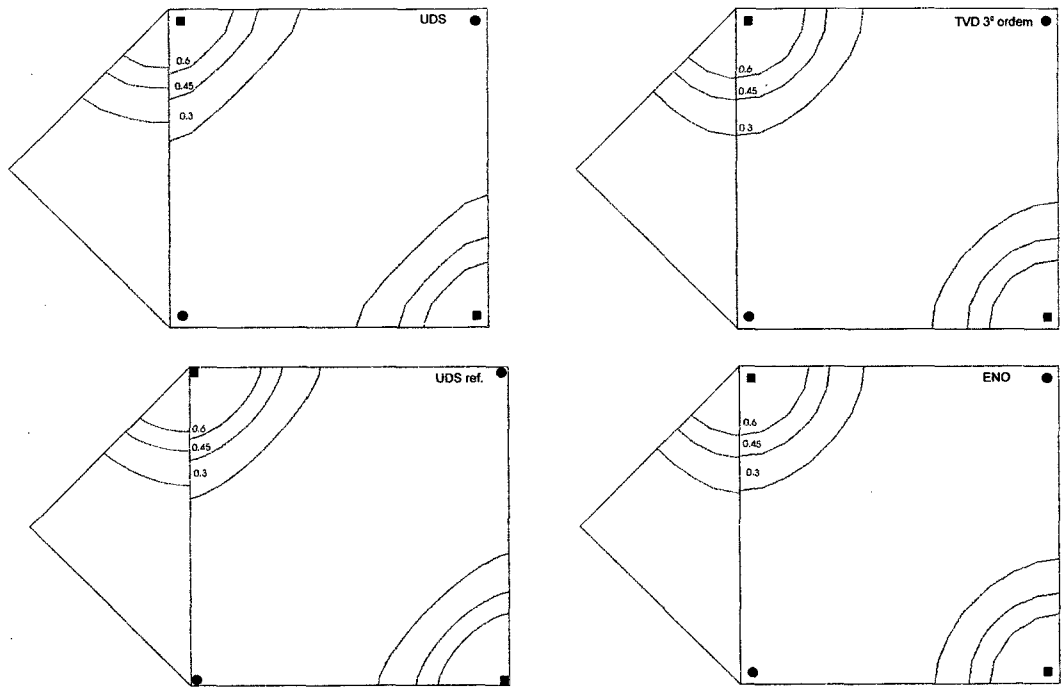


Figura 8.35 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

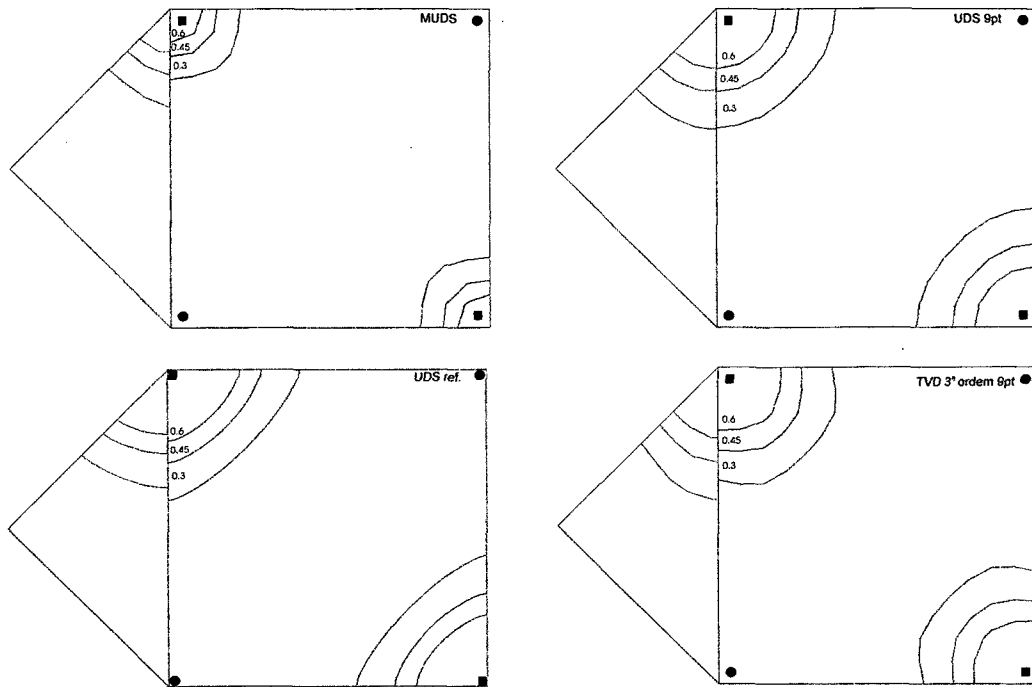


Figura 8.36 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear ($M = 10$)

Observando-se as Figs. 8.35 e 8.36 verifica-se que:

- Os esquemas TVD, ENO e UDS nove-pontos obtêm excelente simetria entre as linhas de iso-saturação de água, e portanto, foram bastante eficientes na redução do efeito de orientação de malha.
- O esquema MUDS apresenta linhas de iso-saturação acentuadamente assimétricas, desaconselhando seu uso para este caso.
- O esquema TVD 3ª ordem nove-pontos apesar de ser eficiente em reduzir a diferença do tempo de irrupção, não apresenta boa simetria entre as linhas de iso-saturação.

Devido aos maus resultados obtidos em todos os casos apresentados, decidiu-se não utilizar mais os esquemas MUDS e MUDS LED.

8.2.1.1.2 Permeabilidades Relativas Não-Lineares

Este problema foi resolvido por Pinto (1991) e consiste na injeção de água em um reservatório bidimensional homogêneo e isotrópico, horizontal, com configuração *five-spot*. As curvas de permeabilidade relativa são definidas pela Eqs.(8.6) e (8.7) com constantes dadas pela tabela 8.2. A tabela 8.4 traz os dados referentes a este problema.

Simulou-se a malha diagonal 10x10 e a malha paralela 14x14 e as malhas refinadas diagonal 30x30 e paralela 42x42. Soluções com erro de truncamento temporal desprezíveis foram obtidas para Δt de 0.4 dias.

As Figs. 8.37 a 8.44 e a tabela 8.7 apresentam os resultados obtidos, para este problema com M igual a 1, aplicando-se UDS, TVD para várias funções limitadoras, ENO, UDS nove-pontos, TVD nove-pontos para várias funções limitadoras.

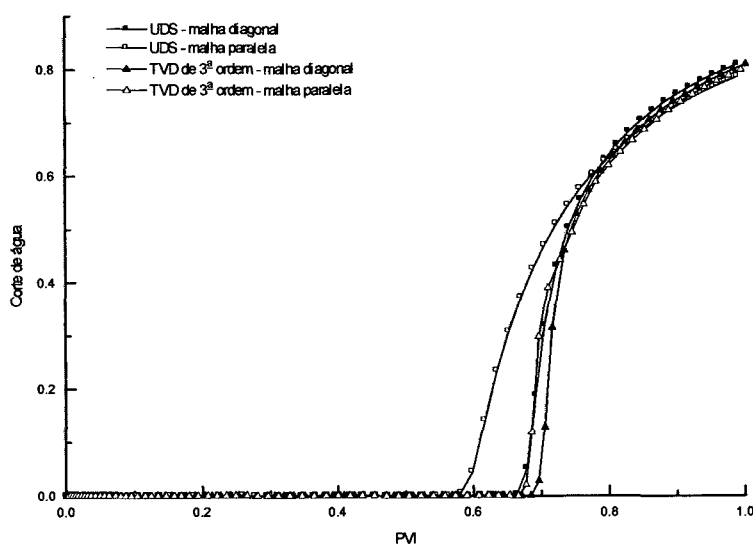


Figura 8.37 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

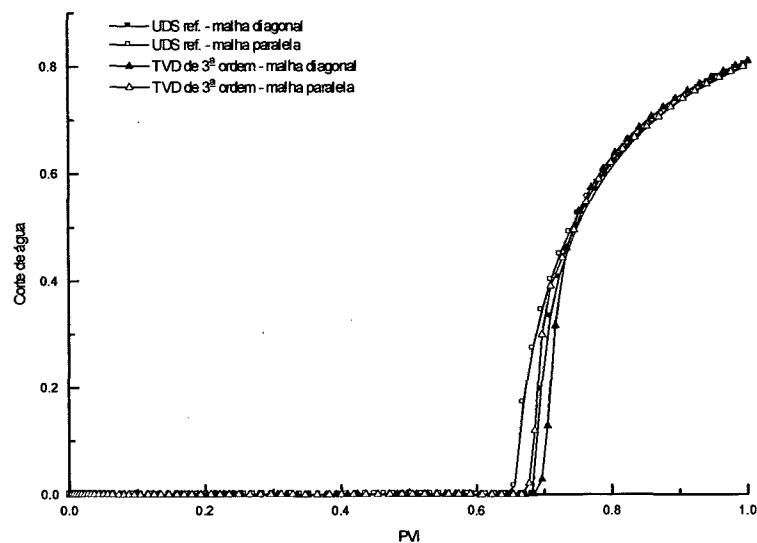


Figura 8.38 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

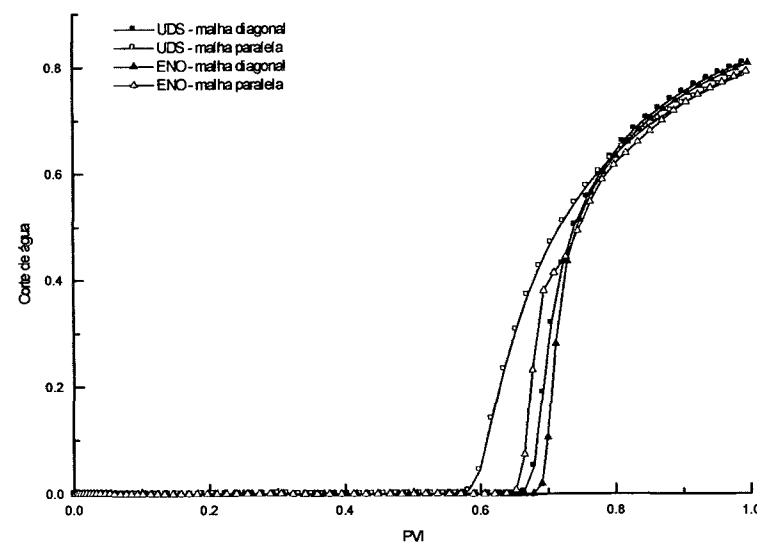


Figura 8.39 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

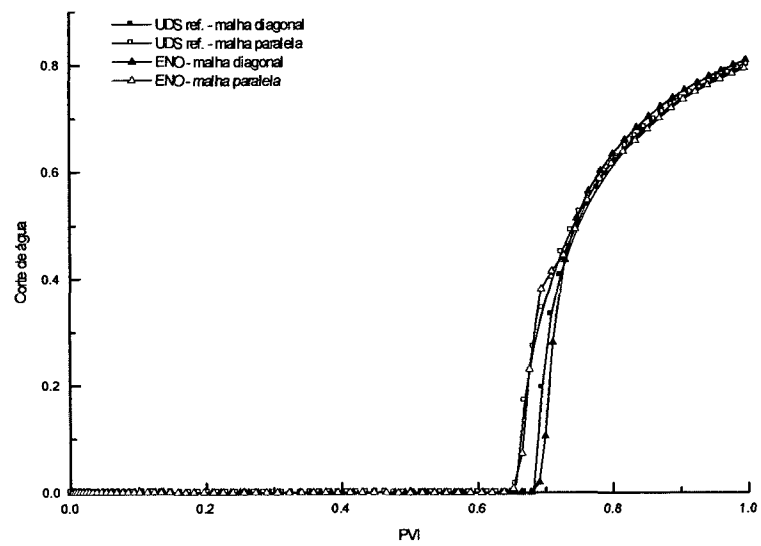


Figura 8.40 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

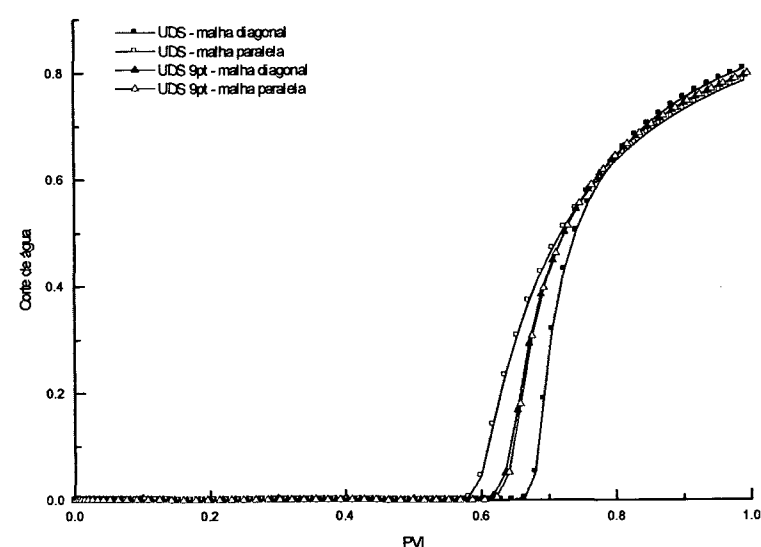


Figura 8.41 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

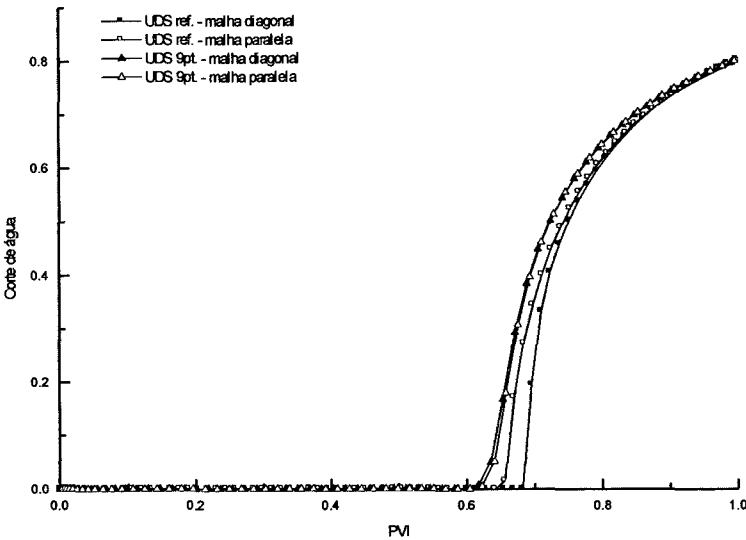


Figura 8.42 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

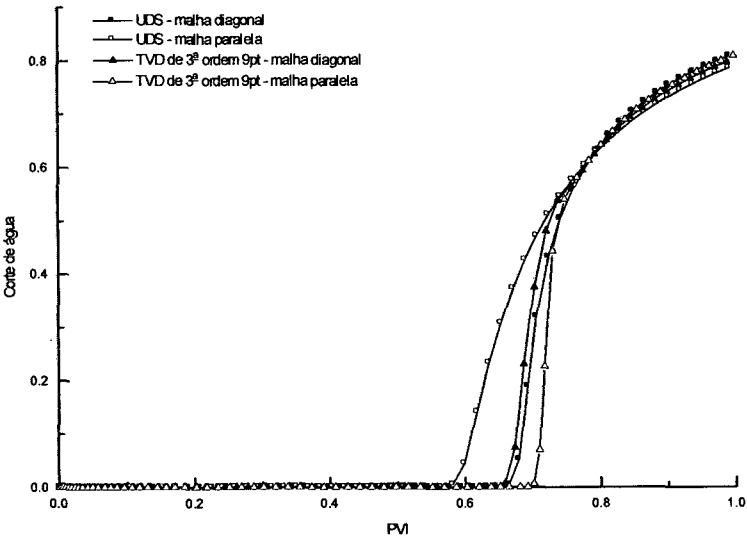


Figura 8.43 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

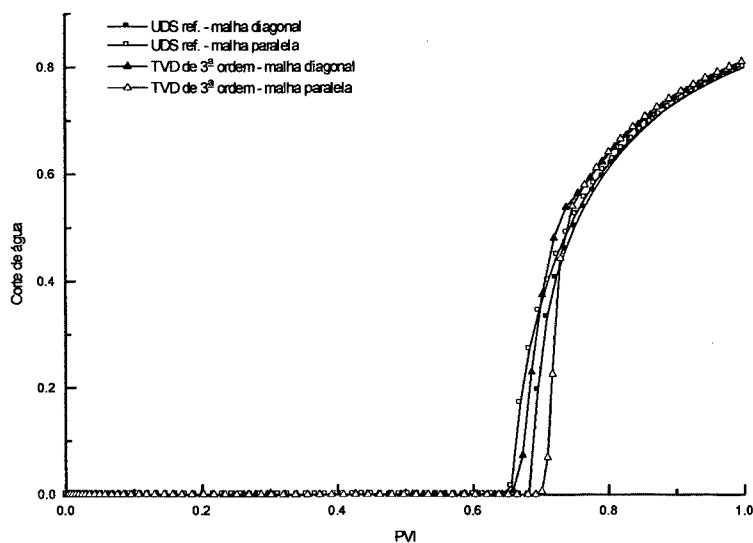


Figura 8.44 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

Pode-se verificar através das Figs. 8.37 a 8.44 e a tabela 8.7 que:

- Os esquemas TVD são eficientes na redução da diferença de *breakthrough*, obtendo valores menores que o esquema UDS para todas as funções limitadoras. Utilizando-se a função limitadora Superbee obtém-se diferença de *breakthrough* aproximadamente 7 e 3 vezes menor que as obtidas pelos esquemas UDS e UDS com malha refinada, respectivamente.
- O esquema ENO apresenta resultados melhores que o esquema UDS mais é menos eficiente em diminuir o as diferenças de tempo de irrupção que os esquemas TVD que utilizam função limitadora próximas ao limite superior da região de Sweby (3ª ordem e Superbee).
- O esquema UDS de nove-pontos é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo um valor aproximadamente 12 vezes menor que a diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS. Observa-se ainda, que a diferença entre as curvas de corte de água são muito pequenas, no entanto, as mesmas estão localizadas entre as soluções apresentadas pelo esquema UDS o que significa não há redução de difusão numérica. Logo, o que ocorre uma eficiente homogenização da difusão numérica, resultando em um efeito de orientação de malha quase nulo.
- O esquema TVD de nove-pontos reduz a diferença de *breakthrough* comparada com a obtida com o uso do esquema UDS, no entanto, é muito menos eficiente que o esquema UDS nove-pontos.

Tabela 8.7 – Tempo de irrupção em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração *five-spot* com permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

| | Diagonal | Paralela | Diferença |
|-----------------------------|----------|----------|-----------|
| UDS | 0.669 | 0.586 | 0.083 |
| UDS ref. | 0.689 | 0.655 | 0.034 |
| TVD minmod | 0.685 | 0.647 | 0.038 |
| TVD de Van Leer | 0.689 | 0.663 | 0.026 |
| TVD 3ª ordem | 0.692 | 0.675 | 0.017 |
| TVD Superbee | 0.693 | 0.681 | 0.012 |
| ENO | 0.688 | 0.654 | 0.034 |
| UDS nove-pontos | 0.620 | 0.627 | 0.007 |
| TVD minmod nove-pontos | 0.648 | 0.677 | 0.029 |
| TVD de Van Leer nove-pontos | 0.655 | 0.693 | 0.038 |
| TVD 3ª ordem nove-pontos | 0.660 | 0.703 | 0.043 |
| TVD Superbee nove-pontos | 0.662 | 0.707 | 0.045 |

As Figs. 8.45 e 8.46 apresentam os mapas de saturação das soluções obtidas pelos vários esquemas do problema de configuração *five-spot* não-linear com M igual a 1.

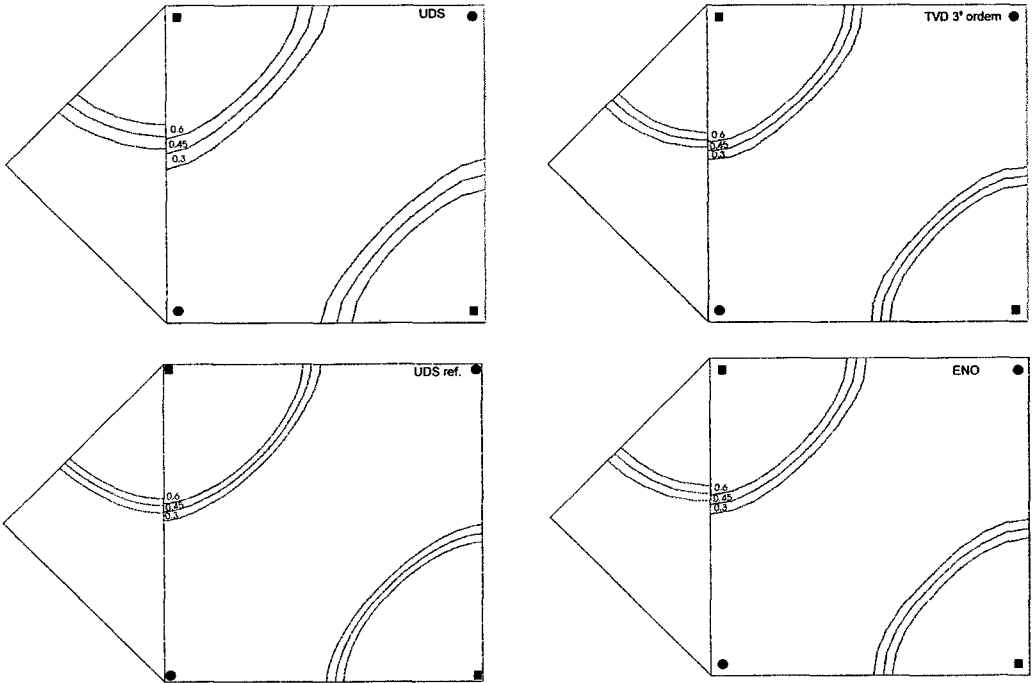


Figura 8.45 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

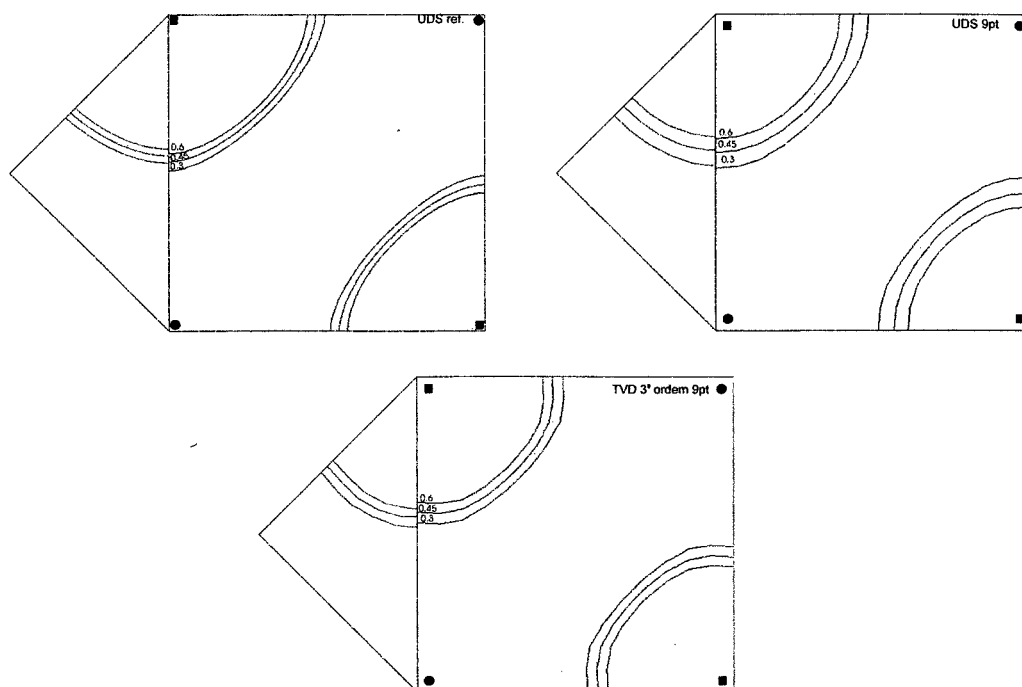


Figura 8.46 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 1$)

Observando-se as Figs. 8.45 e 8.46 verifica-se que:

- Os esquemas TVD e ENO capturam melhor a frente de saturação, traduzido pela maior proximidade entre as linhas, quando comparadas a solução obtida com o esquema UDS, no entanto, verifica-se que não há simetria entre as linhas. Portanto, conclui-se, para este caso, que a redução das diferenças de tempo de irrupção obtida por estes esquemas advém da melhor captura da frente de deslocamento.
- O esquema UDS nove-pontos obtém simetria entre as linhas mas não melhora a captura da frente, portanto, para este caso o esquema reduz o efeito de orientação de malha através da homogeneização dos erros de truncamento mas não há redução de difusão numérica.
- O esquema TVD 3ª ordem nove-pontos captura melhor a frente de saturação em comparação ao esquema UDS de nove-pontos mas é menos eficiente na homogeneização dos erros de truncamento.

Com o intuito de verificar-se o efeito da razão de mobilidade nos resultados obtidos pelos diversos esquemas, simulou-se a malha diagonal 10×10 e a malha paralela 14×14 e as malhas refinadas diagonal 30×30 e paralela 42×42 para M igual a 10. Soluções com erro de truncamento temporal desprezíveis foram obtidas para Δt de 10^{-1} dias.

As Figs. 8.47 a 8.54 e a tabela 8.8 apresentam os resultados obtidos, para este problema com M igual a 10, aplicando-se UDS, TVD para várias funções limitadoras, ENO, UDS nove-pontos, TVD nove-pontos para várias funções limitadoras.

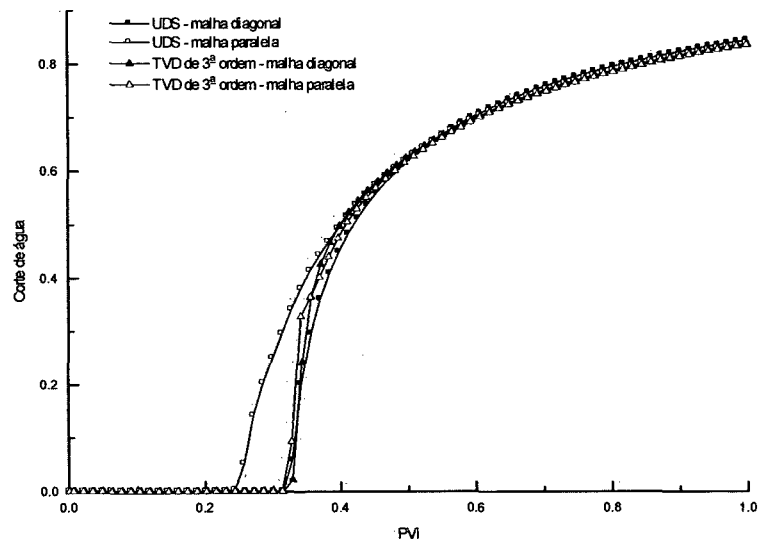


Figura 8.47 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

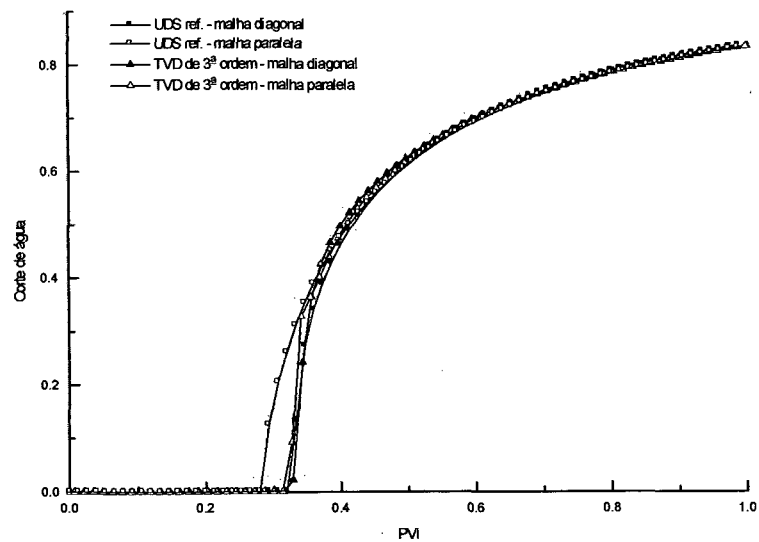


Figura 8.48 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

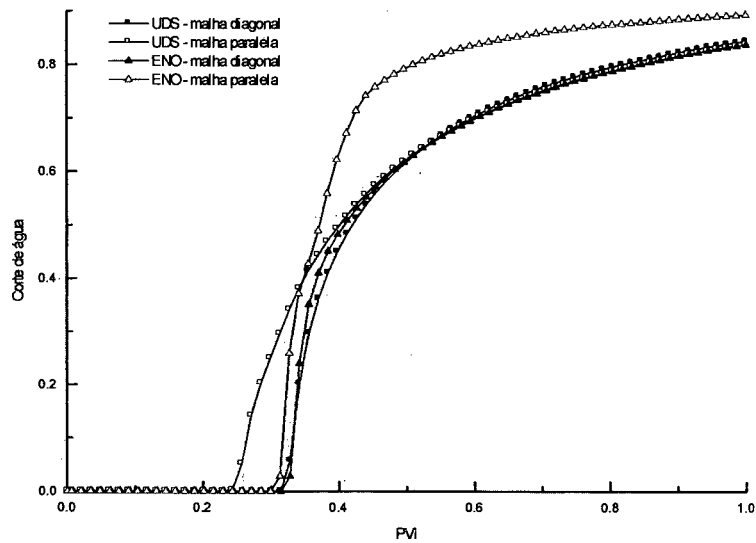


Figura 8.49 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

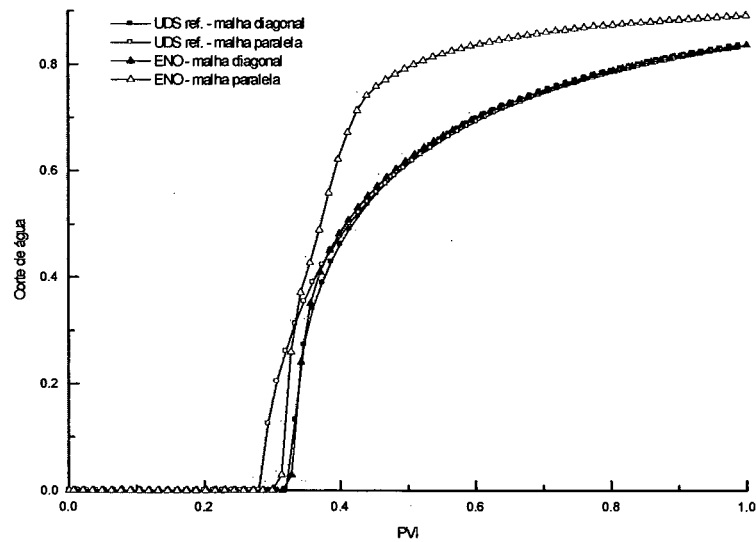


Figura 8.50 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

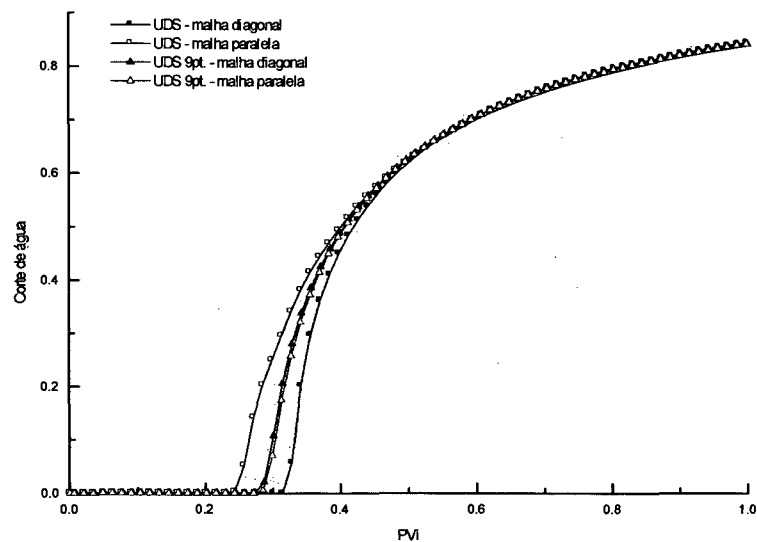


Figura 8.51 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

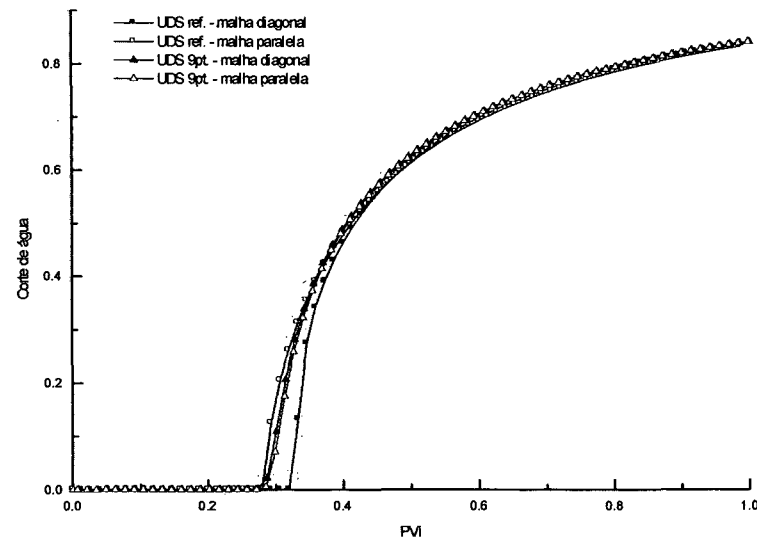


Figura 8.52 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

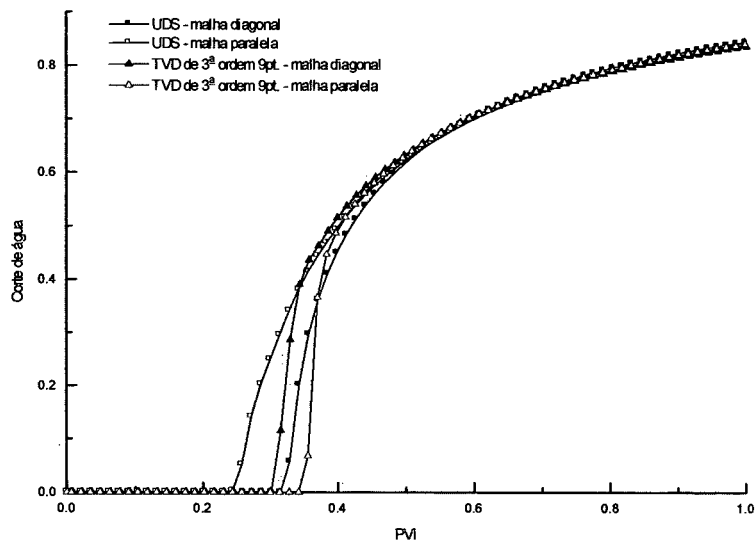


Figura 8.53 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

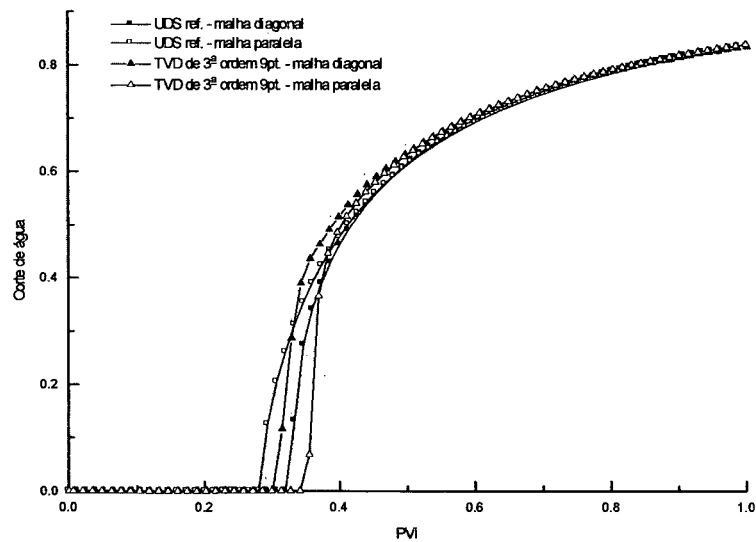


Figura 8.54 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

Os resultados das Figs. 8.47 a 8.54 e a tabela 8.8 mostram que:

- Os esquemas TVD são eficientes na redução da diferença de *breakthrough*, obtendo valores menores que o esquema UDS para todas as funções limitadoras. Utilizando-se a função limitadora 3ª ordem obtém-se diferença de *breakthrough* aproximadamente 18 e 7 vezes menor que as obtidas pelos esquemas UDS e UDS com malha refinada, respectivamente.
- O esquema ENO apesar de ser eficiente em reduzir as diferenças de tempo de irrupção, apresenta uma produção de água para malha paralela superestimada para a malha paralela. Este comportamento indica que a solução apresentou oscilação, e portanto, o esquema não foi monotônico para este caso.
- O esquema UDS de nove-pontos é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo um valor aproximadamente 15 vezes menor que a diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS. Observa-se ainda, que a diferença entre as curvas de corte de água são muito pequenas, no entanto, as mesmas estão localizadas entre as soluções apresentadas pelo esquema UDS o que significa não há redução de difusão numérica. Semelhante aos caso anterior conclui-se que ocorre uma eficiente homogenização da difusão numérica, resultando em um efeito de orientação de malha quase nulo.
- O esquema TVD de nove-pontos reduz a diferença de *breakthrough* comparada com a diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS, no entanto, é muito menos eficiente que o esquema UDS nove-pontos.

Tabela 8.8 – Tempo de irrupção em PVI obtidos pelos esquemas numéricos para a configuração *five-spot* com permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

| | Diagonal | Paralela | Diferença |
|-----------------------------|----------|----------|-----------|
| UDS | 0.321 | 0.249 | 0.072 |
| UDS ref. | 0.330 | 0.282 | 0.048 |
| TVD minmod | 0.325 | 0.307 | 0.018 |
| TVD de Van Leer | 0.324 | 0.318 | 0.006 |
| TVD 3ª ordem | 0.327 | 0.323 | 0.004 |
| TVD Superbee | 0.324 | 0.333 | 0.009 |
| ENO | 0.326 | 0.310 | 0.016 |
| UDS nove-pontos | 0.283 | 0.288 | 0.005 |
| TVD minmod nove-pontos | 0.301 | 0.335 | 0.034 |
| TVD de Van Leer nove-pontos | 0.303 | 0.346 | 0.043 |
| TVD 3ª ordem nove-pontos | 0.305 | 0.351 | 0.046 |
| TVD Superbee nove-pontos | 0.307 | 0.360 | 0.053 |

As Figs. 8.55 e 8.56 apresentam os mapas de saturação das soluções obtidas pelos vários esquemas do problema de configuração *five-spot* não-linear com M igual a 10.

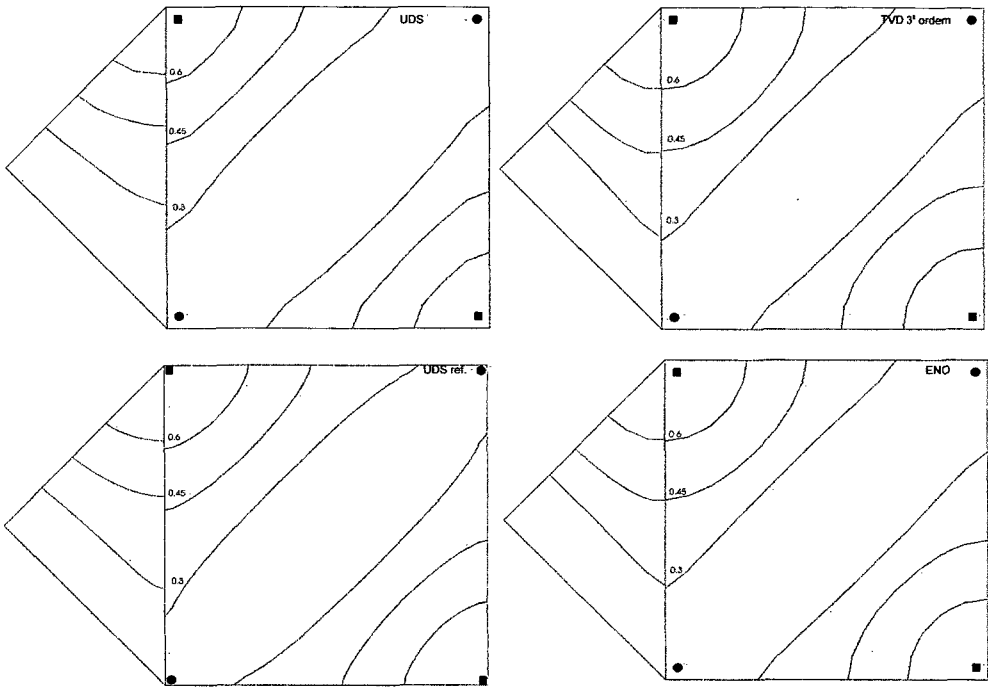


Figura 8.55 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

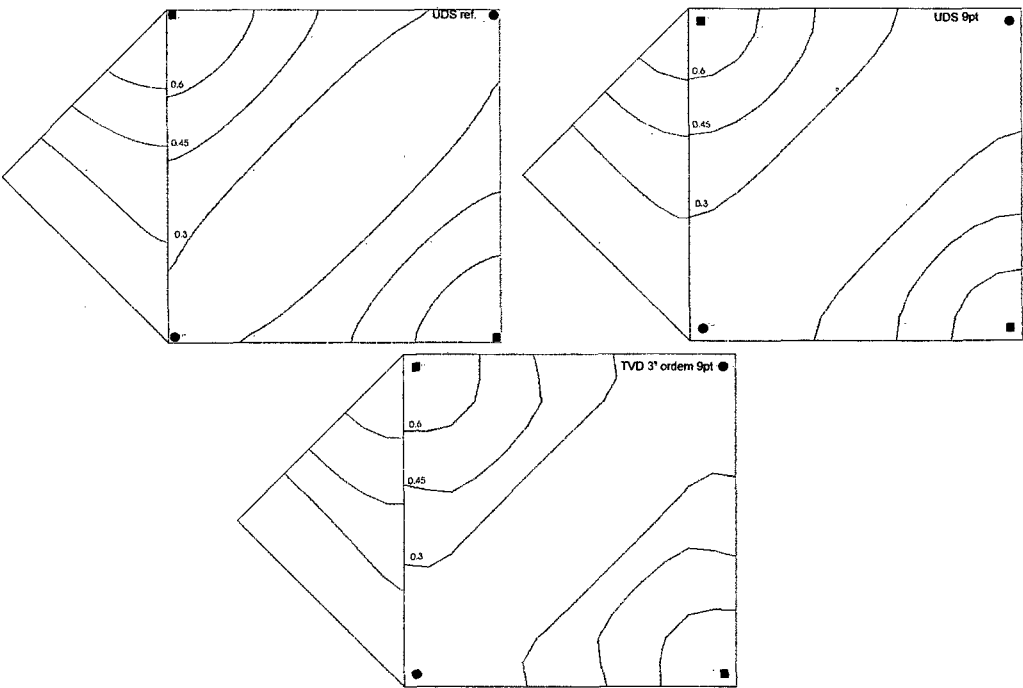


Figura 8.56 – Mapa de saturação, PVI igual a 0.3, para a configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear ($M = 10$)

Observando-se as Figs. 8.55 e 8.56 verifica-se que:

- Os esquemas TVD, ENO e UDS nove-pontos obtêm excelente simetria entre as linhas de iso-saturação de água, e portanto, foram bastante eficientes na redução do efeito de orientação de malha.
- O esquema TVD 3ª ordem nove-pontos apesar de ser eficiente em reduzir a diferença do tempo de irrupção, não apresenta boa simetria entre as linhas de iso-saturação.

8.2.2 Coordenadas Curvilíneas

8.2.2.1 Problema dos 3 Poços

Com o intuito de investigar o efeito de orientação de malha Hegre *et al.* (1986) criaram um problema com dois poços produtores equidistantes de um poço injetor, como mostra a Fig. 8.57. Eles utilizaram uma malha que alinhava o poço produtor 2 com o injetor, semelhante a malha ilustrada na Fig. 8.58, consequentemente existe um caminho preferencial para o avanço da frente de água. As tabelas 8.9 e 8.10 mostram os dados do problema.

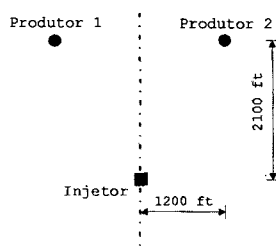


Figura 8.57 – Distribuição e configuração dos poços

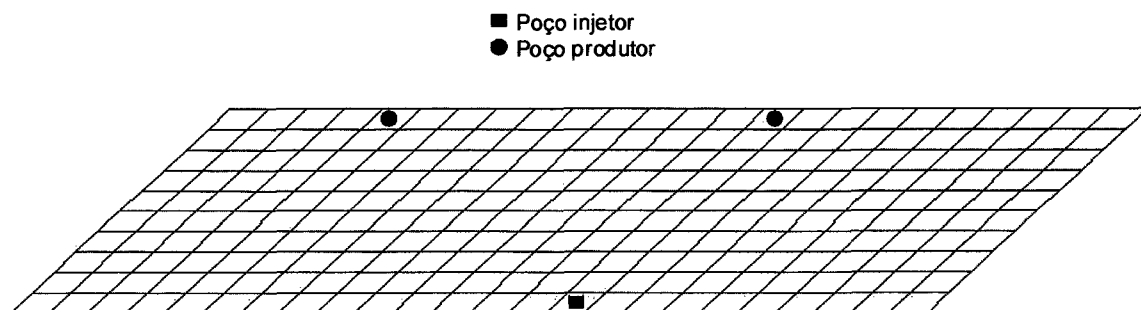


Figura 8.58 – Malha utilizada para o caso dos 3 poços (24x10)

Tabela 8.9 – Dados do problema dos 3 poços

| Dados | Valor |
|----------------------------------|---|
| Pressão inicial | 27.25 x10 ⁶ Pa (3952 psi) |
| Saturação inicial de água | 0.25 |
| Porosidade | 0.19 |
| Compressibilidade da rocha | 4.35x10 ⁻¹⁰ 1/Pa (3x10 ⁻⁶ 1/psi) |
| Densidade da água | $\rho^w = 996.96 \text{ kg/m}^3$ |
| Densidade da água | $\rho^o = 740.76 \text{ kg/m}^3$ |
| Viscosidade da água | $\mu^w = 5 \times 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$ ($\mu^w = 0.5 \text{ cp}$) |
| Viscosidade do óleo | $\mu^o = 2 \times 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$ ($\mu^o = 0.2 \text{ cp}$) |
| Fator volume de formação da água | $B^w = 1$ |
| Fator volume de formação da óleo | $B^o = 0.96$ |
| Compressibilidade da água | 3x10 ⁻⁶ 1/psi (4.35x10 ⁻¹⁰ 1/Pa) |
| Compressibilidade do óleo | 1.45x10 ⁻⁹ 1/Pa (1x10 ⁻⁵ 1/psi) |
| Permeabilidade absoluta | 4.93x10 ⁻¹⁴ m ² (50 mD) |
| Vazão do injetor | 3.53x10 ⁻³ m ³ /s (1920 STB/dias) |
| Vazão nos produtores | 1.84x10 ⁻³ m ³ /s (1000 STB/dias) |
| Δt | 129600 s (1.5 dias) |

Tabela 8.10 – Permeabilidade relativa do problema dos 3 poços

| S^w | K^{rw} | K^{ro} |
|-------|----------|----------|
| 0.25 | 0 | 0.92 |
| 0.3 | 0.02 | 0.705 |
| 0.4 | 0.055 | 0.42 |
| 0.5 | 0.1 | 0.24 |
| 0.6 | 0.145 | 0.11 |
| 0.7 | 0 | 0 |

Simulou-se a malha apresentada na Fig. 8.58 para diversos esquemas. Para comparação, simulou-se uma malha refinada, com três vezes mais volumes em cada direção, para o

esquema UDS. Soluções com erro de truncamento temporal desprezíveis foram obtidas para Δt de 1.5 dias.

As Figs. 8.59 a 8.66 e a tabela 8.11 apresentam os resultados obtidos, para este problema, aplicando-se UDS, TVD para várias funções limitadoras, ENO, UDS nove-pontos, TVD nove-pontos para várias funções limitadoras.

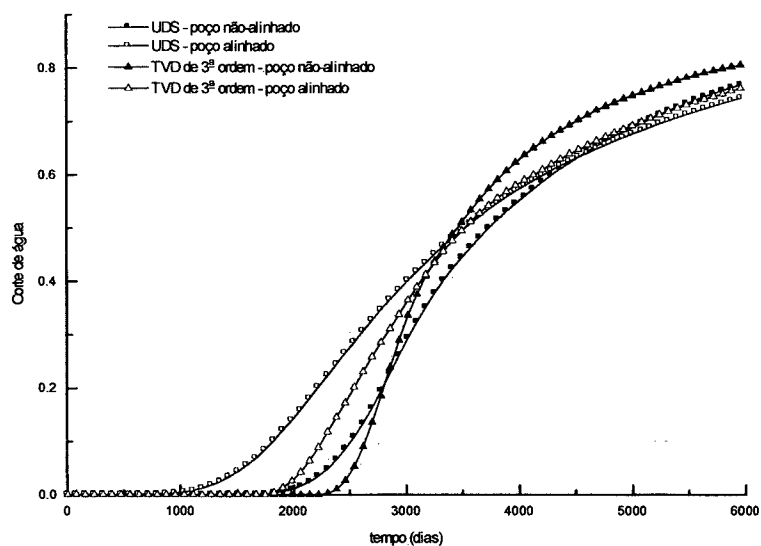


Figura 8.59 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem para o problema dos 3 poços

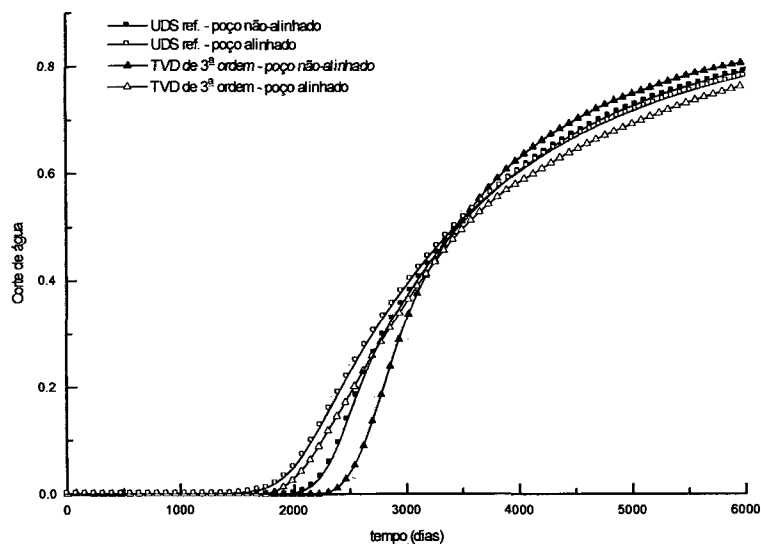


Figura 8.60 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem para o problema dos 3 poços

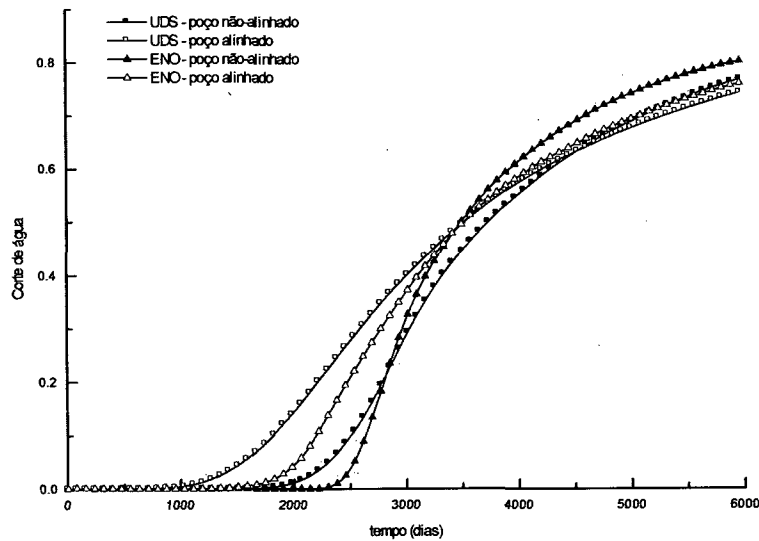


Figura 8.61 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e ENO para o problema dos 3 poços

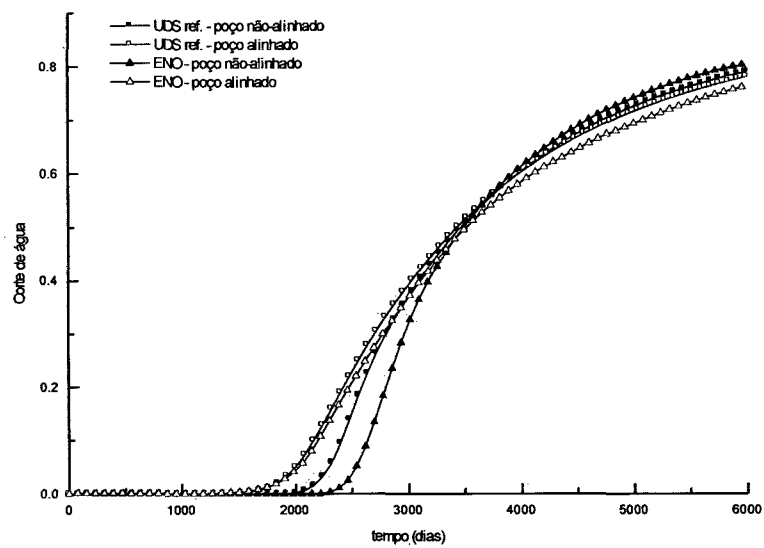


Figura 8.62 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e ENO para o problema dos 3 poços

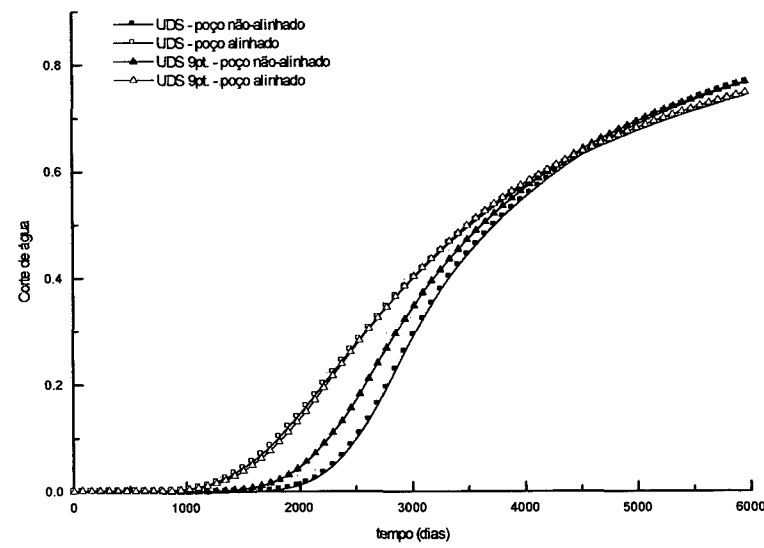


Figura 8.63 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e UDS nove-pontos para o problema dos 3 poços

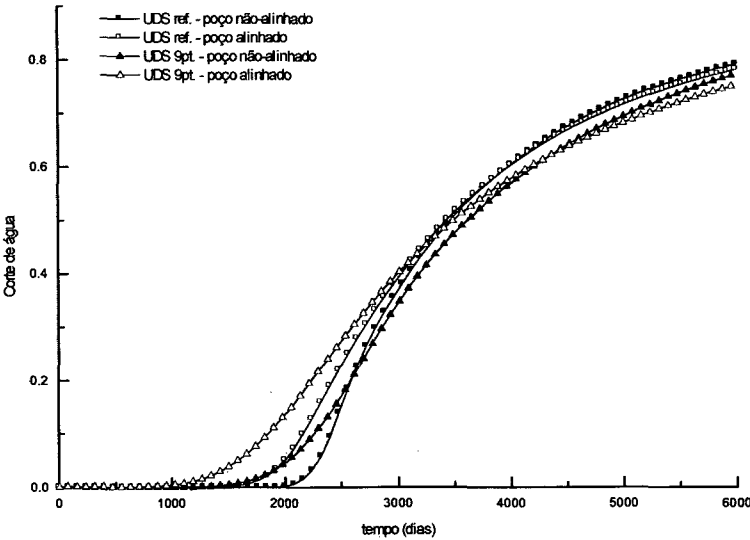


Figura 8.64 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e UDS nove-pontos para o problema dos 3 poços

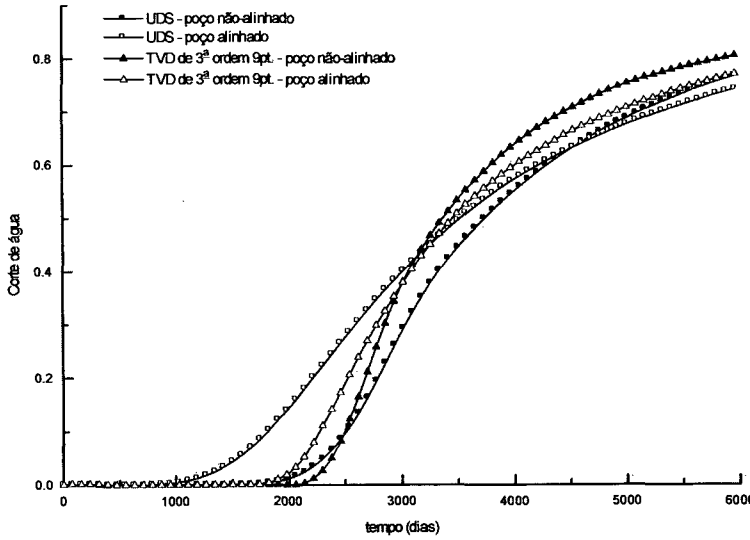


Figura 8.65 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS e TVD de 3ª ordem nove-pontos para o problema dos 3 poços

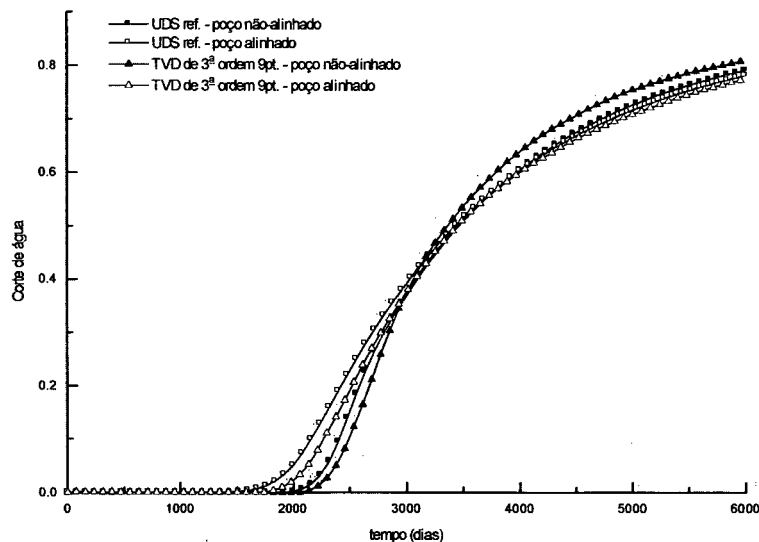


Figura 8.66 – Corte de água obtido pelos esquemas UDS (refinado) e TVD de 3ª ordem nove-pontos para o problema dos 3 poços

Pode-se verificar e analisar através das Figs. 8.59 a 8.66 e a tabela 8.11 que:

- O esquema UDS introduz um efeito de orientação de malha excessivo, resultando em uma diferença de tempo de irrupção de mais de 800 dias.
- Os esquemas TVD obtêm diferenças de tempo de irrupção bem menores que o esquema UDS. Utilizando-se a função limitadora Superbee obtém-se diferença de *breakthrough* menor que a obtida pelo esquema UDS com malha refinada.
- O esquema ENO apresenta resultados melhores que o esquema UDS mais é menos eficiente em diminuir as diferenças de tempo de irrupção que os esquemas TVD que utilizam função limitadora próximas ao limite superior da região de Sweby (Van Leer, 3ª ordem e Superbee).
- O esquema UDS de nove-pontos é eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, no entanto, o esquema TVD com função limitadora Superbee obtém uma menor diferença de *breakthrough*.
- O esquema TVD de nove-pontos é muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*, obtendo um valor na ordem de 4 vezes menor, para a função limitadora Superbee, que a diferença de *breakthrough* obtida com o uso do esquema UDS.

Tabela 8.11 – Tempo de irrupção em dias obtidos pelos esquemas numéricos para o caso dos 3 poços

| | Não-alinhado | Alinhado | Diferença |
|-----------------------------|--------------|----------|-----------|
| UDS | 1971,8 | 1139,5 | 832,3 |
| UDS ref. | 2119,7 | 1731,0 | 388,7 |
| TVD minmod | 2251,4 | 1577,4 | 674,0 |
| TVD de Van Leer | 2331,3 | 1801,8 | 529,5 |
| TVD 3ª ordem | 2367,8 | 1876,1 | 500,7 |
| TVD Superbee | 2388,0 | 2024,1 | 363,9 |
| ENO | 2380,2 | 1710,7 | 669,4 |
| UDS nove-pontos | 1649,0 | 1175,6 | 473,4 |
| TVD minmod nove-pontos | 1995,5 | 1581,0 | 414,5 |
| TVD de Van Leer nove-pontos | 2137,9 | 1825,7 | 312,2 |
| TVD 3ª ordem nove-pontos | 2205,0 | 1903,1 | 301,8 |
| TVD Superbee nove-pontos | 2276,8 | 2065,5 | 211,3 |

As Figs. 8.67 e 8.68 apresentam os mapas de saturação das soluções obtidas pelos vários esquemas do problema dos 3 poços.

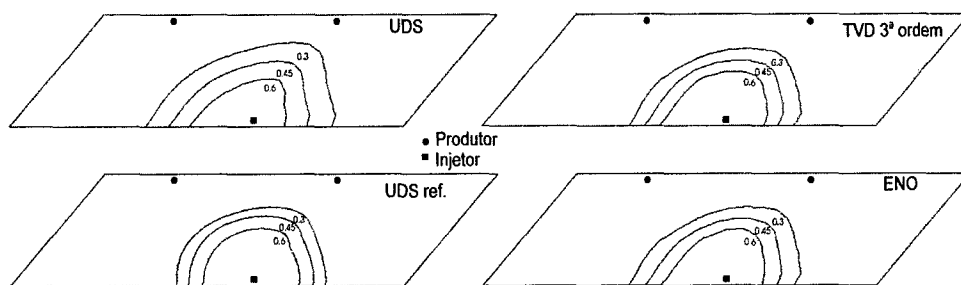


Figura 8.67 – Mapa de saturação do problema dos 3 poços para 1000 dias

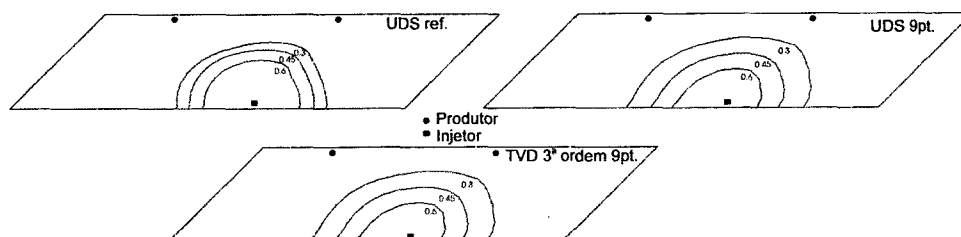


Figura 8.68 – Mapa de saturação do problema dos 3 poços para 1000 dias

Observando-se as Figs. 8.67 e 8.68 verifica-se que:

- Os esquemas TVD de 3ª ordem e ENO capturam melhor a frente de saturação de água que o esquema UDS com malha não-refinada. Entretanto, apesar destes esquemas capturarem com melhor resolução a frente, pode ser visto a existência de um caminho preferencial indicada pela distorção das linhas de iso-saturação, consequentemente, há presença de efeito de orientação de malha. Isto vem a indicar novamente que os esquemas TVD e ENO não atacam o problema do efeito de orientação de malha através homogeneização dos erros de truncamento, como feito pelos esquemas nove-pontos, mas sim predizendo melhor os fortes gradientes no domínio.
- O esquema UDS nove-pontos diminui a distorção das linhas de iso-saturação e deste modo minimizam o efeito de orientação de malha. Consequentemente, as diferenças de tempo de irrupção são amenizadas.
- O esquema TVD 3ª ordem nove-pontos além de diminuir a distorção das linhas de iso-saturação também captura melhor a frente de deslocamento. Estas duas características fazem que os esquemas TVD nove-pontos sejam bastante eficientes em reduzir o efeito de orientação de malha.

9 Conclusões e Recomendações

9.1 Conclusões

Este trabalho teve por principais objetivos fazer um estudo dos efeitos de orientação de malha nas equações do petróleo, utilizando coordenadas generalizadas, e da minimização destes erros através do uso de funções de interpolação, tais como, TVD, ENO, MUDS, MUDS LED, UDS nove-pontos e TVD nove-pontos. Para tanto, apresentou-se a metodologia para simulação tridimensional e trifásica de reservatórios de petróleo e as diferentes funções de interpolação aplicadas para as equações de petróleo. Propôs-se também, o esquema ENO e os esquemas nove-pontos de baixa e alta-ordem para coordenadas generalizadas. Foram simulados vários casos com o intuito de testar o comportamento de cada esquema de interpolação.

As principais conclusões são listadas abaixo:

- O esquema UDS introduz excessiva difusão numérica descaracterizando a frente de deslocamento.
- O esquema CDS provoca o aparecimento de oscilações tornando o seu uso impróprio.
- Os esquemas TVD obtêm resultados sem oscilação com semelhante, ou menor, difusão numérica que o esquema UDS para uma quantidade de células, deste último, três vezes maior.
- Os esquemas TVD e ENO não resolvem o efeito de orientação de malha diretamente, mas estes esquemas podem minimizá-lo pela melhor captura da frente de saturação.
- O aumento da razão de viscosidade torna a frente de deslocamento mais suave, este fato acaba por diminuir a diferença entre as soluções apresentadas pelo esquema TVD com várias funções limitadoras.
- Os esquemas MUDS e MUDS LED não apresentaram bons resultados para os casos testados.
- Os esquemas nove-pontos são muito eficiente em reduzir a diferença de *breakthrough*.
- O esquema UDS nove-pontos reduz o efeito de orientação de malha através da homogeneização dos erros de truncamento mas não há redução de difusão numérica comparada à solução obtida com o esquema UDS cinco-pontos.
- O esquema TVD de nove-pontos consegue, geralmente, aliar a homogeneização dos erros de truncamento com a redução de difusão numérica.

Dos problemas simulados ressalta-se alguns dados quantitativos:

- O TVD de 3ª ordem obteve, para os casos com configuração *five-spot* e permeabilidade relativa linear, uma diferença no tempo de irrupção da ordem de 2 vezes menor que a diferença obtida com o uso do esquema UDS. Para os casos com configuração *five-spot* e permeabilidade relativa não-linear com M igual 1 e M igual 10 as diferenças foram de 5 e 18 vezes, respectivamente, menor que a diferença de *breakthrough* obtida pelo esquema UDS.
- O esquema UDS nove-pontos obtém, para todos os casos testados com configuração *five-spot*, uma diferença de *breakthrough* de no mínimo 10 vezes menor que a diferença obtida com o uso do esquema UDS.
- Para o problema dos 3 poços os esquemas TVD com função limitadora Superbee, ENO, UDS nove-pontos e TVD Superbee nove-pontos, obtiveram uma diferença de *breakthrough* de 2.3, 1.25, 1.76 e 4 vezes, respectivamente, menor que a diferença obtida com o uso do esquema UDS.

9.2 Recomendações

Como recomendações sugere-se:

- Utilizar o esquema TVD ao invés do esquema ENO. Os esquemas TVD com função limitadora localizada na parte superior da região Sweby apresentam melhores resultados que o esquema ENO e são mais simples de implementar.
- A utilização dos esquemas MUDS e MUDS LED não é aconselhável como função de interpolação para os problemas de reservatórios de petróleo.

Para os trabalhos futuros que porventura sejam realizados seguindo a linha de pesquisa do presente trabalho, sugere-se:

- Aplicar o esquema ENO como proposto inicialmente por Rubin e Blunt (1991) e verificar se apresentará oscilação para os casos não-lineares com razão de mobilidade diferente de 1.
- Desenvolver um tratamento das falhas geológicas para os esquemas nove-pontos, tornando-os aplicáveis para a simulação de problemas de reservatórios de petróleo mais complexos.

Apêndice A - Avaliação das Derivadas dos Potenciais

As equações que governam o escoamento dos fluidos no reservatório de petróleo, quando discretizadas, necessitam da avaliação das derivadas dos potenciais em todas as faces, como explanado no Capítulo 4. Estas derivadas são aqui apresentadas.

As derivadas diretas dos potenciais são dados por

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} \right)_e = F_e \left[\frac{\Phi_E^p - \Phi_p^p}{\Delta \xi} \right] \quad (A.1)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} \right)_w = F_w \left[\frac{\Phi_p^p - \Phi_w^p}{\Delta \xi} \right] \quad (A.2)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_n = F_n \left[\frac{\Phi_N^p - \Phi_p^p}{\Delta \eta} \right] \quad (A.3)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_s = F_s \left[\frac{\Phi_p^p - \Phi_S^p}{\Delta \eta} \right] \quad (A.4)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_t = F_t \left[\frac{\Phi_T^p - \Phi_p^p}{\Delta \gamma} \right] \quad (A.5)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_b = F_b \left[\frac{\Phi_p^p - \Phi_B^p}{\Delta \gamma} \right] \quad (A.6)$$

Por sua vez, as derivadas cruzadas são dadas por

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_e = F_e \frac{(F_{\eta SE}^E \Phi_{SE}^p + F_{\eta E}^E \Phi_E^p + F_{\eta NE}^E \Phi_{NE}^p + F_{\eta S}^P \Phi_S^p + F_{\eta P}^P \Phi_P^p + F_{\eta N}^P \Phi_N^p)}{\Delta \eta} \quad (A.7)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma} \right)_e = F_e \frac{(F_{\gamma BE}^E \Phi_{BE}^p + F_{\gamma E}^E \Phi_E^p + F_{\gamma TE}^E \Phi_{TE}^p + F_{\gamma B}^P \Phi_B^p + F_{\gamma P}^P \Phi_P^p + F_{\gamma T}^P \Phi_T^p)}{\Delta \gamma} \quad (A.8)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_w = F_w \frac{(F_{\eta SW}^W \Phi_{SW}^p + F_{\eta W}^W \Phi_W^p + F_{\eta NW}^W \Phi_{NW}^p + F_{\eta S}^P \Phi_S^p + F_{\eta P}^P \Phi_P^p + F_{\eta N}^P \Phi_N^p)}{\Delta \eta} \quad (A.9)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma}\right)_w = F_w \frac{(F_{\gamma BW}^W \Phi_{BW}^p + F_{\gamma W}^W \Phi_W^p + F_{\gamma TW}^W \Phi_{TW}^p + F_{\gamma B}^P \Phi_B^p + F_{\gamma P}^P \Phi_P^p + F_{\gamma T}^P \Phi_T^p)}{\Delta \gamma} \quad (A.10)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi}\right)_n = F_n \frac{(F_{\xi NW}^N \Phi_{NW}^p + F_{\xi N}^N \Phi_N^p + F_{\xi NE}^N \Phi_{NE}^p + F_{\xi W}^P \Phi_W^p + F_{\xi P}^P \Phi_P^p + F_{\xi E}^P \Phi_E^p)}{\Delta \xi} \quad (A.11)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma}\right)_n = F_n \frac{(F_{\gamma BN}^N \Phi_{BN}^p + F_{\gamma N}^N \Phi_N^p + F_{\gamma TN}^N \Phi_{TN}^p + F_{\gamma B}^P \Phi_B^p + F_{\gamma P}^P \Phi_P^p + F_{\gamma T}^P \Phi_T^p)}{\Delta \gamma} \quad (A.12)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi}\right)_s = F_s \frac{(F_{\xi SW}^S \Phi_{SW}^p + F_{\xi S}^S \Phi_S^p + F_{\xi SE}^S \Phi_{SE}^p + F_{\xi W}^P \Phi_W^p + F_{\xi P}^P \Phi_P^p + F_{\xi E}^P \Phi_E^p)}{\Delta \xi} \quad (A.13)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \gamma}\right)_s = F_s \frac{(F_{\gamma BS}^S \Phi_{BS}^p + F_{\gamma S}^S \Phi_S^p + F_{\gamma TS}^S \Phi_{TS}^p + F_{\gamma B}^P \Phi_B^p + F_{\gamma P}^P \Phi_P^p + F_{\gamma T}^P \Phi_T^p)}{\Delta \gamma} \quad (A.14)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi}\right)_t = F_t \frac{(F_{\xi TW}^T \Phi_{TW}^p + F_{\xi T}^T \Phi_T^p + F_{\xi TE}^T \Phi_{TE}^p + F_{\xi W}^P \Phi_W^p + F_{\xi P}^P \Phi_P^p + F_{\xi E}^P \Phi_E^p)}{\Delta \xi} \quad (A.15)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta}\right)_t = F_t \frac{(F_{\eta TS}^T \Phi_{TS}^p + F_{\eta T}^T \Phi_T^p + F_{\eta TN}^T \Phi_{TN}^p + F_{\eta S}^P \Phi_S^p + F_{\eta P}^P \Phi_P^p + F_{\eta N}^P \Phi_N^p)}{\Delta \eta} \quad (A.16)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi}\right)_b = F_b \frac{(F_{\xi BW}^B \Phi_{BW}^p + F_{\xi B}^B \Phi_B^p + F_{\xi BE}^B \Phi_{BE}^p + F_{\xi W}^P \Phi_W^p + F_{\xi P}^P \Phi_P^p + F_{\xi E}^P \Phi_E^p)}{\Delta \xi} \quad (A.17)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta}\right)_b = F_b \frac{(F_{\eta BS}^B \Phi_{BS}^p + F_{\eta B}^B \Phi_B^p + F_{\eta BN}^B \Phi_{BN}^p + F_{\eta S}^P \Phi_S^p + F_{\eta P}^P \Phi_P^p + F_{\eta N}^P \Phi_N^p)}{\Delta \eta} \quad (A.18)$$

Apêndice B - Coeficientes de Falha

Muitos reservatórios de petróleo apresentam falhas geológicas, e portanto, um simulador deve ter a capacidade de tratar esta informação. Neste trabalho falha geológica é definida como uma região, ou uma superfície, do reservatório totalmente impermeável aos fluidos, ou seja, não há fluxo de massa. Deve-se salientar que a condição de contorno implementada no programa Sirp3D é a de fluxo nulo, logo, o simulador tem a capacidade de levar em consideração as diferentes regiões com falhas geológicas, que porventura existam no reservatório, e as superfícies de contorno de uma mesma maneira.

Com a utilização de coordenadas curvilíneas generalizadas é possível fazer uso de uma metodologia simples para o tratamento das falhas geológicas. Esta metodologia consiste em primeiramente dotar o gerador de malhas da habilidade de forçosamente passar linhas de coordenada pelas superfícies que definem a falha e posteriormente, no simulador, aplicar as restrições ao fluxo nestas superfícies. Neste ponto é que justifica-se a construção e o emprego dos coeficientes de falha. Do ponto de vista computacional, zerar eficientemente os fluxos nas interfaces, que apresentam falha, não é de sobremaneira simples, pois a implementação mais descuidada utilizaria verificações, ou seja, comandos condicionais para definir estas interfaces, em toda a simulação. Para implementar uma metodologia eficiente foi desenvolvido os coeficientes de falha para avaliação das derivadas dos potenciais, como apresentado no Capítulo 4, que juntamente com as mobilidades definem o fluxo de massa em cada interface. Maiores detalhes sobre este tópico podem ser vistos em Maliska *et al.* (1993) e Cunha (1996).

B.1 Construção dos Coeficientes de Falha

Os coeficientes de falha estão divididos em dois grupos, chamados de diretos e cruzados. Para exemplificar, será obtido as derivadas do potencial em relação a ξ e a η na face leste.

Na avaliação de uma derivada do potencial em relação a uma certa face, o coeficiente de falha direto estará relacionado diretamente com esta face. Define-se o coeficiente de falha direto da face leste da seguinte forma:

$$F_e = 1 - f_{\xi_e} \quad (\text{B.1})$$

onde,

f_{ξ_e} - coeficiente relacionado com a face leste, que assume o valor 0 quando a interface é normal e 1 quando é impermeável.

Os outros coeficientes diretos relacionados com as demais faces são definidos de modo semelhante. A Fig. B.1 facilita a visualização dos volumes envolvidos no cálculo e representa

um plano computacional γ constante.

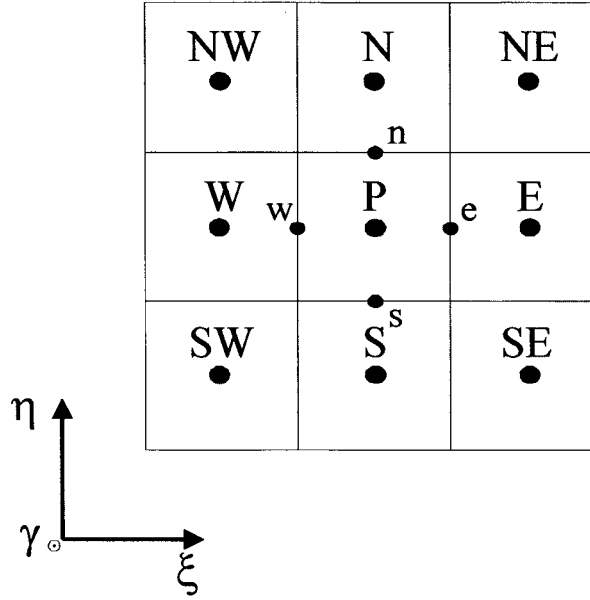


Figura B.1 - Plano computacional $\xi \times \eta$

Os coeficientes de falha direto são utilizados para avaliação tanto das derivadas diretas dos potenciais quanto cruzadas, pois, no sistema coordenado generalizado as derivadas diretas e cruzadas compõem, juntamente com as métricas, as derivadas normais às interfaces. Contando com a possibilidade da face leste ser uma face impermeável, a derivada do potencial em relação a ξ na face leste fica definida por

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} \right)_e = F_e \left[\frac{\Phi_E^p - \Phi_P^p}{\Delta \xi} \right] \quad (\text{B.2})$$

e não somente por,

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \xi} \right)_e = \left[\frac{\Phi_E^p - \Phi_P^p}{\Delta \xi} \right] \quad (\text{B.3})$$

Por sua vez, a derivada do potencial em relação a η na face leste, pode ser avaliada por

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_e = 0.5 \left[\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_P + \left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_E \right] \quad (\text{B.4})$$

onde,

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_P = \frac{(\Phi_N^p - \Phi_S^p)}{2\Delta \eta} \quad (\text{B.5})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_E = \frac{(\Phi_{NE}^p - \Phi_{SE}^p)}{2\Delta \eta} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo-se as Eqs.(B.5) e (B.6) na Eq.(B.4) resulta em

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_e = 0.5 \left[\left(\frac{\Phi_N^p - \Phi_S^p}{2\Delta\eta} \right) + \left(\frac{\Phi_{NE}^p - \Phi_{SE}^p}{2\Delta\eta} \right) \right] \quad (B.7)$$

No entanto, a Eq.(B.7) não atenta para a possibilidade de existir algum tipo de falha nas interfaces, ou mesmo, que alguma dessas faça parte da fronteira.

Supondo-se que a face n, ver Fig. B.1, é impermeável, não há mais sentido em se avaliar $\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_p$ pela Eq.(B.5). Avalia-se agora esta derivada por um só lado, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_p = \frac{(\Phi_P^p - \Phi_S^p)}{\Delta\eta} \quad (B.8)$$

Poder-se-ia supor, agora, que outras faces também apresentam impermeabilidade, e portanto, observa-se que existe um número grande de situações para avaliação das derivadas dos potenciais. Estas possibilidades, sem o uso dos coeficientes de falha, tornar-se-iam inúmeros comandos condicionais no código do simulador.

Desta forma, propôs-se uma equação geral para a avaliação de $\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_p$, da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial \Phi^p}{\partial \eta} \right)_p = (1 - f_{\eta_s})(1 - f_{\eta_n}) \frac{(\Phi_N^p - \Phi_S^p)}{2\Delta\eta} + f_{\eta_s}(1 - f_{\eta_n}) \frac{(\Phi_N^p - \Phi_P^p)}{\Delta\eta} + f_{\eta_n}(1 - f_{\eta_s}) \frac{(\Phi_P^p - \Phi_S^p)}{\Delta\eta} \quad (B.9)$$

Observando-se a Eq.(B.9) nota-se o encapsulamento de três casos, são eles:

- Interfaces norte e sul normais ($f_{\eta_n} = f_{\eta_s} = 0$)

Na ausência de falhas, obtém-se novamente a Eq.(B.5).

- Interface norte impermeável ($f_{\eta_s} = 0$ e $f_{\eta_n} = 1$)

Com falha na interface norte, obtém-se novamente a Eq.(B.8).

- Interface norte e sul impermeável ($f_{\eta_n} = f_{\eta_s} = 1$)

Com falha nas duas interfaces, esta derivada não tem mais sentido e o simulador impõe o valor zero.

Definindo-se os coeficientes cruzados por

$$F_{\eta_N^p} = \frac{1}{2} \left[\frac{F_s F_n}{2} + f_{\eta_s} F_n \right] \quad (B.10)$$

$$F_{\eta_S^p} = \frac{1}{2} \left[-\frac{F_s F_n}{2} - f_{\eta_n} F_s \right] \quad (B.11)$$

$$F\eta_P^P = \frac{1}{2}[-f\eta_s F_n + f\eta_n F_s] \quad (B.12)$$

$$F\eta_{NE}^E = \frac{1}{2} \left[\frac{F_{sE} F_{nE}}{2} + f\eta_{sE} F_{nE} \right] \quad (B.13)$$

$$F\eta_{SE}^E = \frac{1}{2} \left[-\frac{F_{sE} F_{nE}}{2} - f\eta_{nE} F_{sE} \right] \quad (B.14)$$

$$F\eta_E^E = \frac{1}{2}[-f\eta_{sE} F_{nE} + f\eta_{nE} F_{sE}] \quad (B.15)$$

Rescreve-se a Eq.(B.9),

$$\left(\frac{\partial \Phi^P}{\partial \eta} \right)_P = 2 \left(\frac{F\eta_N^P \Phi_N^P + F\eta_S^P \Phi_S^P + F\eta_P^P \Phi_P^P}{\Delta \eta} \right) \quad (B.16)$$

e de forma análoga avalia-se $\left(\frac{\partial \Phi^P}{\partial \eta} \right)_E$, por

$$\left(\frac{\partial \Phi^P}{\partial \eta} \right)_E = 2 \left(\frac{F\eta_{NE}^E \Phi_{NE}^P + F\eta_{SE}^E \Phi_{SE}^P + F\eta_E^E \Phi_E^P}{\Delta \eta} \right) \quad (B.17)$$

Substituindo-se as Eqs.(B.16) e (B.17) em (B.4) e acrescentando o coeficiente de falha direto F_e , como já foi comentado, obtém-se

$$\left(\frac{\partial \Phi^P}{\partial \eta} \right)_e = F_e \frac{(F_{\eta_{SE}}^E \Phi_{SE}^P + F_{\eta_E}^E \Phi_E^P + F_{\eta_{NE}}^E \Phi_{NE}^P + F_{\eta_S}^P \Phi_S^P + F_{\eta_P}^P \Phi_P^P + F_{\eta_N}^P \Phi_N^P)}{\Delta \eta} \quad (B.18)$$

As demais equações apresentadas no apêndice A são deduzidas de maneira similar.

Referências Bibliográficas

- AZIZ, K. and SETTARRI, A. "*Petroleum reservoir simulation.*" New York: ed. Applied Science Publishers, 1979.
- BAJOR, O. and CORMACK, D.E. "*Neuman boundary conditions for nine-point simulators and the grid orientation effect.*" Paper SPE 19352, 1989a.
- _____. "*A new method for characterizing the grid orientation phenomenon.*" Paper SPE 19353, 1989b.
- BELL, J.B. and SHUBIN, G.R. "*Higher-order Godunov methods for reducing numerical dispersion in reservoir simulation.*" SPE paper 13514, 1985.
- BOJORN, O. and KAZEMI, H. "*Mixed five-point / nine-point finite-difference formulation of multiphase flow in petroleum reservoirs.*" SPE Paper 21227, presented at the 11th SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, CA, Feb. 17-20, 1991.
- BORIS, J.P. "*A fluid transport algorithm that works.*" In *Computing as a Language of Physics*, pp. 171-189, International Atomic Energy Commission, 1971.
- BORIS, J.P. and BOOK, D.L. "*Flux-Corrected Transport I: SHASTA, a fluid-transport algorithm that works.*" *Journal of Computational Physics*, vol. 11, pp. 38-69, 1973.
- _____. "*Flux-Corrected Transport III: Minimal error FCT methods.*" *Journal of Computational Physics*, vol. 20, pp. 397-431, 1976.
- BORIS, J.P.; BOOK, D.L. and HAIN, K. H. "*Flux-Corrected Transport II: Generalization of the method.*" *Journal of Computational Physics*, vol. 18, pp. 248-283, 1975.
- BRAND, C.W.; HEINEMANN, Z.E. and AZIZ, K. "*The grid orientation effect in reservoir simulation.*" Paper SPE 21228, SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, Feb. 1991.
- BURSTEIN, S.Z. and MIRIN, A.A. "*Third order difference methods for hyperbolic systems.*" *Journal of Computational Physics*, vol. 5, pp. 547-571, 1970.
- CHAUDHARI, N.M. "*An improved numerical technique for solving multidimensional miscible displacement equations.*" *SPE Journal*, pp. 277-284, 1971.
- CHEN, W.H.; DURLOFSKY, L.J.; ENGQUIST, B. and OSHER, S. "*Minimization of grid orientation effects through use of higher-order finite difference methods.*" SPE paper 22887, 1991.

- COATS, K.H and MODINE, A.D. "*A consistent method for calculating transmissibilities in nine-point finite difference equations.*" Paper SPE 12248, Paper presented at the Reservoir Simulation Symposium, San Francisco, CA, Nov. 15-18, 1983.
- COLELLA, P.; CONCUS, P. and SETHIAN, J. "*Some numerical methods for discontinuous flows in porous media.*" Page. 161-186 in *The Mathematics of Reservoir Simulation*, ed. R. Ewing. SIAM, Philadelphia, 1983.
- COLELLA, P. and WOODWARD, P.R. "*The Piecewise-Parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations.*" *Journal of Computational Physics*, vol. 54, pp. 174-201, 1984.
- COURANT, R; ISAACSON, E. and REES, M. "*On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences.*" *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 5, pp. 243-255, 1952.
- CUNHA, A.R. "*Uma metodologia para simulação numérica tridimensional de reservatórios de petróleo utilizando modelo Black-Oil e formulação em frações mássicas.*" Florianópolis, 1996. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.
- CUNHA, A.R.; MALISKA, C.R.; SILVA, A.F.C. and LIVRAMENTO, M.A. "*Two-dimensional two-phase petroleum reservoir simulation using boundary-fitted grids.*" V Encontro Nacional de Ciências Térmicas, São Paulo, pp. 359-362, Dec. 1994.
- CZESNAT, A.O.; MALISKA, C.R.; SILVA, A.F.C. e LUCIANETTI, R.M. "*Efeitos de orientação de malha na simulação de reservatórios de petróleo usando coordenadas generalizadas coincidentes com a fronteira.*" ENCIT 98, Proceedings of 7th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, Brasil, pp. 1007-1012, 1998.
- DAKE, L.P. "*Fundamentals of reservoir engineering.*" New York, USA: ed. Elsevier Scientific Publishing Company, 1978.
- FERZIGER, J.H., PERIC, M. "*Computational methods for fluid dynamics.*" Germany: ed. Springer, 1996.
- FORSYTH, P.A. and SAMMON, P.H. "*Gas phase appearance and disappearance in fully implicit Black Oil simulation*", SPEJ, Oct. 1984.
- GLIMM, J. and LAX, P.D. "*Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws.*" *Mem. Amer. Math. Soc.*, n. 101, 1970.
- GODUNOV, S.K. "*Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of equation of fluid dynamics.*" *Math. Sbornik*, vol. 47, pp. 271-306, 1959 (em russo, traduzido para o inglês por US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226, 1969).
- GOODMAN, J.B. and LEVEQUE, R.J. "*On the accuracy of stable schemes for 2D conservation laws.*" *Mathematics of Computation*, vol. 45, pp. 15-21, 1985.

- GUPTA, D. and KING, M.J. "*High resolution monotonic schemes for reservoir fluid flow simulation.*" Submitted to In Situ, 1990.
- HARTEN, A. "*The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities: III. Self-adjusting hybrid schemes.*" Math. of Computation, vol. 32, n. 142, pp. 363-389, 1978.
- _____. "*High-resolution schemes for hyperbolic conservation laws.*" Journal of Computational Physics, vol. 49, pp. 357-393, 1983.
- _____. "*On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes.*" SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 21, pp. 1-23, 1984.
- HARTEN, A.; HYMAN, J.M. and LAX, P.D. "*On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks.*" Comm. Pure Appl. Math., vol. 29, pp. 297-322, 1976.
- HARTEN, A. and OSHER, S. "*Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes I.*" SIAM J. Numer. Anal., vol. 24, pp. 279-309, 1987.
- HARTEN, A.; ENGQUIST, B.; OSHER, S. and CHAKRAVARTHY, S. R. "*Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes III.*" Journal of Computational Physics, vol. 77, pp. 439-471, 1987.
- HEGRE, T.M., DALEN, V. and HENRIQUEZ, A. "*Generalized transmissibilities for distorted grids in reservoir simulation.*" Paper SPE 15622, Proc. SPE 61st Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, 1986.
- HIRSCH, C. "*Numerical computation of internal and external flows.*" Wiley-Interscience, vol. 1 e 2, 1988.
- HIRSCH, C. and LACOR, C. "*Upwind algorithms based on a diagonalization of the multidimensional Euler equations.*" AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 89-1958, 1989.
- HIRSCH, C. and VAN RANSBEECK, P. "*Cell-centered multidimensional upwind algorithms for structured meshes.*" Proc. 1st European Computational Fluid Dynamics Conference, Elsevier, pp. 53-60, 1992.
- _____. "*Multidimensional upwinding and artificial dissipation.*" In: CAUGHEY, D. and HAFEZ, M.M. (eds.). "*Frontiers of computational fluid dynamics.*" Ed. John Wiley & Sons Ltd., 1994. pp. 597-627.
- HUSSAINI, M.Y., VAN LEER, B. and VAN ROSENDALE, J. (eds.). "*Upwind and high-resolution schemes.*" Germany: ed. Springer, 1997.

- KHOSLA, P.K. and RUBIN, S.G. "A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme." *Computers Fluids*, 2, pp. 207-209, 1974.
- KO, S.C.M. and AU, A.D.K. "A weighted nine-point finite-difference scheme for eliminating the grid orientation effect in numerical reservoir simulation." Paper SPE 8248, 1979.
- LACOR, C. and HIRSCH, C. "Genuinely upwind algorithms for the multidimensional Euler equations." *AIAA journal*, vol. 30 n. 1, pp. 56-63, 1992.
- LAX, P.D. and WENDROFF, B. "System of conservation laws." *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, pp. 217-237, 1960.
- LEBLANC, J.L. and CAUDLE, B.H. "A streamline model for secondary recovery", SPE Journal, pp. 7-12, 1971.
- LEROUX, A.Y. "A numerical conception of entropy for quasi-linear equations." *Math. Comput.*, vol. 31, pp. 848-872, 1977.
- LEVEQUE, R.J. "Numerical methods for conservation laws." Berlin: ed. Birkhäuser, 1992.
- LOPEZ, I.F. "Esquemas de Volume de Controle para Simulação de Reservatórios." Rio de Janeiro, 1994. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática Aplicada, UFRJ.
- LUCIANETTI, R.M.; MALISKA, C.R.; SILVA, A.F.C. e CZESNAT, A.O. "Efeitos da não-ortogonalidade de malha na taxa de convergência do método de Newton utilizando coordenadas generalizadas." ENCIT 98, Proceedings of 7th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, Brasil, pp. 1013-10018, 1998.
- MACCORMACK, R.W. "The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering." AIAA Paper 69-354, 1969.
- MALISKA, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional." Rio de Janeiro, RJ, Brasil: ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1995.
- MALISKA, C.R.; SILVA, A.F.C.; CZESNAT, A.; LUCIANETTI, R.M. and MALISKA Jr., C.R., "Three-dimensional multiphase flow simulation in petroleum reservoirs using the mass fractions as dependent variables." SPE 39067, Aug. 1997.
- MALISKA, C.R.; SILVA, A.F.C.; JUCÁ, P.C.; CUNHA, A.R. e LIVRAMENTO, M.A. "Desenvolvimento de um Simulador 3D Black-Oil em Coordenadas Curvilíneas Generalizadas – Parte I", Relatório CENPES/PETROBRÁS, SINMEC/EMC/UFSC, Relatório RT-93-1, Florianópolis, SC, Brasil, 1993.
- MENEZES, L.A.P. de "Estudo de esquemas de alta resolução em algoritmos simultâneos e sequenciais." Florianópolis, 1996. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.

- MOTA, M.A.A. "*Simulação numérica de reservatórios de petróleo utilizando coordenadas generalizadas e esquema de interpolação TVD.*" Florianópolis, 1994. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.
- MOTA, M. A. A. e MALISKA, C. R. "*Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Coordenadas Generalizadas e Interpolação TVD*", Anais V ENCIT, pp. 325-328, São Paulo, Brasil, 1994.
- OLEINIK, O.A. "*Discontinuous solutions of non-linear differential equations.*" Amer. Math. Soc. Transl. Series, vol. 2, n. 26, pp. 95-171, 1957.
- OSHER, S. and CHAKRAVARTHY, S. "*High resolution schemes and entropy condition.*" SIAM J. Numerical Anal., vol 21, pp. 955-984, 1984a.
- _____. "*Very high order accurate TVD schemes.*" ICASE Report #84-44, 1984b.
- OSTEBO, B. and KAZEMI, H. "*Mixed five-point nine-point finite difference formulation of multiphase flow in petroleum reservoirs.*" Paper SPE 21227, California, 1991.
- PINTO, A.C.C., "*Esquemas de Alta Resolução para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios.*" São Paulo, Nov. 1991. Dissertação de Mestrado, UNICAMP.
- PINTO, A.C.C.; CORREA, A.C.F. e CUNHA, M.C. de CASTRO. "*High-resolution schemes for conservation laws: applications to reservoir engineering.*" SPE paper 24262, 1992.
- POPE, G.A.; HONG, C.H.; SEPEHRNOORI, K. and LAKE, L.W. "*Two dimensional numerical simulation of chemical flooding.*" SPE paper 9939, 1981.
- RAITHBY, G.D. and TORRANCE, K.E. "*Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow.*" Comp. & Fluids, vol. 2, 1974.
- RICHTMYER, R.D. and MORTON, K.W. "*Difference methods for initial-value problems.*" Interscience, 1967.
- ROE, P.L. "*Numerical algorithms for the linear wave equation.*" Royal Aircraft Establishment, Technical Report 81047, 1981.
- RUBIN, B. and BLUNT, M. J., "*Higher-order implicit flux limiting schemes for Black-Oil simulation.*" SPE 21222, pp. 219-229, California, Feb. 1991.
- RUBIN, E.L. and BURSTEIN, S.Z. "*Difference methods for the inviscid and viscous equations of a compressible gas.*" Journal of Computational Physics, vol. 2, pp. 178-196, 1976.

- RUSANOV, V.V. "On difference schemes of third-order accuracy for nonlinear hyperbolic systems." *Journal of Computational Physics*, vol. 5, pp. 507-516, 1970.
- SAAD, N.; POPE, G.A. and SEPEHRNOORI, K. "Application of higher-order methods in compositional simulation." *SPE Reservoir Engineering*, pp. 623-630, Nov. 1990.
- SAMON, P.H. "A nine-point differencing scheme based on high-order stream tube modelling." Paper SPE 21223, presented at the 11th SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, CA, Feb. 17-20, 1991.
- SHAH, P.C. "A nine-point finite difference operator for reduction of the grid orientation effect." Paper SPE 12251, presented at the Reservoir Simulation Symposium, San Francisco, CA, Nov. 15-18, 1983.
- SHIN, D. and MERCHANT, A.R. "Higher-order flux update function method for reduction of numerical dispersion and grid orientation effect in reservoir simulation." SPE paper 25600, 1993.
- SHIRALKAR, G.S. and STEPHENSON, R.E. "A general formulation for simulating physical dispersion and a new nine-point scheme." Paper SPE 16975, *SPE Reservoir Engineering*, Feb., 1991.
- SHU, C.W. and OSHER, S. "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes." *J. Comp. Phys.*, vol. 71, pp. 439-471, 1988a.
- _____. "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II." *J. Comp. Phys.*, vol. 83, pp. 32-78, 1988b.
- SIDILKOVER, D. "Numerical solution to steady-state problems with discontinuities." Ph.D. Thesis, Dept. Mathematics, Weizmann Institute of Science, Israel.
- SWEBY, P.K. "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws." *SIAM J Numer. Anal.* 21, pp. 995-1011, 1984
- _____. "High resolution TVD schemes using flux limiters." *Lectures in Applied Mathematics* 22, pp. 289-309, 1985.
- TAGGART, I.J. e PINCZEWSKI, W.V., "The use of higher order differencing techniques in reservoir simulation." Paper presented at the Sixth SPE Symposium on Reservoir Simulation, Dallas, Texas, Aug. 1987.
- TODD, M.R.; O'DELL, P.M. e HIRASAKI, G.T. "Methods for Increasing Accuracy in Numerical Reservoir Simulators." *SPE J.*, pp. 515-530, Dec. 1972.
- VAN LEER, B. "Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity." *Lecture Notes in Physics*, vol. 18, pp. 163-168, 1973.

- _____. "Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme." *Journal of Computational Physics*, vol. 14, pp. 361-370, 1974.
- _____. "Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow." *Journal of Computational Physics*, vol. 23, pp. 263-275, 1977a.
- _____. "Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection." *Journal of Computational Physics*, vol. 23, pp. 276-299, 1977b.
- _____. "Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method." *Journal of Computational Physics*, vol. 32, pp. 101-136, 1979.
- VAN RANSBEECK, P. and HIRSCH, C. "New upwind dissipation models with a multidimensional approach." AIAA 93-3304-CP, 1993.
- WOLCOTT, D.S.; KAZEMI, H. and DEAN, R.H. "A practical method for minimizing the grid orientation effect in reservoir simulation." Paper SPE 36723, 1996.
- WOLCOTT, D.S. ". "A practical method for minimizing the grid orientation effect in reservoir simulation." Colorado School of Mines Ph.D. Thesis, T-4861, 1996.
- WOODWARD, P.R. and COLELLA, P. "The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks." *Journal of Computational Physics*, vol. 54, pp. 115-173, 1984.
- YANOSIK, J.L. e MCCracken, T.A., "A nine-point, finite-difference reservoir simulator for realistic prediction of adverse mobility ratio displacements." *SPE J.*, pp. 253-262, Feb. 1976.
- ZWILLINGER, D. "Standard mathematical tables and formulae" United States: CRC Press Inc., 30th Edition, 1996.